Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe

BILDUNGSLAND Hessen

MATHEMATIK

Impressum

Hessisches Kultusministerium
Luisenplatz 10, 65185 Wiesbaden
Tel.: 0611 368-0
Fax: 0611 368-2096

E-Mail: poststelle.hkm@kultus.hessen.de
Internet: www.kultusministerium.hessen.de

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: Anregungen zur Umsetzung des Kerncurriculums im Unterricht sowie weitere Materialien abrufbar im Internet unter: www.kerncurriculum.hessen.de

1 Die gymnasiale Oberstufe

1.1 Lernen in der gymnasialen Oberstufe

Das Ziel der gymnasialen Oberstufe ist die Allgemeine Hochschulreife, die zum Studium an einer Hochschule berechtigt, aber auch den Weg in eine berufliche Ausbildung ermöglicht. Lernende, die die gymnasiale Oberstufe besuchen, wollen auf die damit verbundenen Anforderungen vorbereitet sein. Erwarten können sie daher einen Unterricht, der sie dazu befähigt, Fragen nach der Gestaltung des eigenen Lebens und der Zukunft zu stellen und orientierende Antworten zu finden. Sie erwarten Lernangebote, die in sinnstiftende Zusammenhänge eingebettet sind, in einem verbindlichen Rahmen eigene Schwerpunktsetzungen ermöglichen und Raum für selbstständiges Arbeiten schaffen. Mit diesem berechtigten Anspruch geht die Verpflichtung der Lernenden einher, die gebotenen Lerngelegenheiten in eigener Verantwortung zu nutzen und mitzugestalten. Lernen wird so zu einem stetigen, nie abgeschlossenen Prozess der Selbstbildung und Selbsterziehung, getragen vom Streben nach Autonomie, Bindung und Kompetenz. In diesem Verständnis wird die Bildung und Erziehung junger Menschen nicht auf zu erreichende Standards reduziert, vielmehr kann Bildung Lernende dazu befähigen, selbstbestimmt und in sozialer Verantwortung, selbstbewusst und resilient, kritisch-reflexiv und engagiert, neugierig und forschend, kreativ und genussfähig ihr Leben zu gestalten und wirtschaftlich zu sichern.

Für die Lernenden stellt die gymnasiale Oberstufe ein wichtiges Bindeglied dar zwischen einem zunehmend selbstständigen, dennoch geleiteten Lernen in der Sekundarstufe I und dem selbstständigen und eigenverantwortlichen Weiterlernen, wie es mit der Aufnahme eines Studiums oder einer beruflichen Ausbildung verbunden ist. Auf der Grundlage bereits erworbener Kompetenzen zielt der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe auf eine vertiefte Allgemeinbildung, eine allgemeine Studierfähigkeit sowie eine fachlich fundierte wissenschaftspropädeutische Bildung. Dabei gilt es in besonderem Maße, die Potenziale der Jugendlichen zu entdecken und zu stärken sowie die Bereitschaft zu beständigem Weiterlernen zu wecken, damit die jungen Erwachsenen selbstbewusste, ihre Neigungen und Stärken berücksichtigende Entscheidungen über ihre individuellen Bildungs- und Berufswege treffen können. Gleichermaßen bietet der Unterricht in der Auseinandersetzung mit ethischen Fragen die zur Bildung reflektierter Werthaltungen notwendigen Impulse – den Lernenden kann so die ihnen zukommende Verantwortung für Staat, Gesellschaft und das Leben zukünftiger Generationen bewusst werden. Auf diese Weise nimmt die gymnasiale Oberstufe den ihr in den §§ 2 und 3 des Hessischen Schulgesetzes (HSchG) aufgegebenen Erziehungsauftrag wahr.

Im Sinne konsistenter Bildungsbemühungen knüpft das Lernen in der gymnasialen Oberstufe an die Inhalte und die Lern- und Arbeitsweisen der Sekundarstufe I an und differenziert sie weiter aus. So zielt der Unterricht auf den Erwerb profunden Wissens sowie auf die Vertiefung bzw. Erweiterung von Sprachkompetenz, verstanden als das Beherrschen kulturell bedeutsamer Zeichensysteme. Der Unterricht fördert Team- und Kommunikationsfähigkeit, lernstrategische und wissenschaftspropädeutische Fähigkeiten und Fertigkeiten, um zunehmend selbstständig lernen zu können, sowie die Fähigkeit, das eigene Denken und Handeln zu reflektieren. Ein breites, in sich gut organisiertes und vernetztes sowie in unterschiedlichen Anwendungssituationen erprobtes Orientierungswissen hilft dabei, unterschiedliche, auch interkulturelle Horizonte des Weltverstehens zu erschließen. Daraus leiten sich die didaktischen Aufgaben der gymnasialen Oberstufe ab. Diese spiegeln sich in den Aktivitäten der Lernenden, wenn sie

- sich aktiv und selbstständig mit bedeutsamen Gegenständen und Fragestellungen zentraler Wissensdomänen auseinandersetzen,
- wissenschaftlich geprägte Kenntnisse für die Bewältigung persönlicher und gesellschaftlicher Herausforderungen nutzen,
- Inhalte und Methoden kritisch reflektieren sowie Erkenntnisse und Erkenntnisweisen auswerten und bewerten,
- in kommunikativen Prozessen sowohl aus der Perspektive aufgeklärter Laien als auch aus der Expertenperspektive agieren.

Schulische Bildung eröffnet den Lernenden unterschiedliche Dimensionen von Erkenntnis und Verstehen. Bildungsprozesse zielen so auf die reflexive Beschäftigung mit verschiedenen „Modi der Weltbegegnung und -erschließung“, für die – in flexibler bzw. mehrfacher Zuordnung – jeweils bestimmte Unterrichtsfächer und ihre Bezugswissenschaften stehen. Folgende vier Modi werden als orientierende Grundlage angesehen:

(1) kognitiv-instrumentelle Modellierung der Welt (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften)
(2) ästhetisch-expressive Begegnung und Gestaltung (Sprache / Literatur, Musik / bildende und theatrale Kunst / physische Expression)
(3) normativ-evaluative Auseinandersetzung mit Wirtschaft und Gesellschaft (Geschichte, Politik, Ökonomie, Recht)
(4) deskriptiv-exploratorische Begegnung und Auseinandersetzung mit existentiellen Fragen der Weltdeutung und Sinnfindung (Religion, Ethik, Philosophie)

Diese vier Modi folgen keiner Hierarchie und können einander nicht ersetzen. Jeder Modus bietet eine eigene Art und Weise, die Wirklichkeit zu konstituieren – aus einer jeweils besonderen Perspektive, mit den jeweils individuellen Erschließungsmustern und Erkenntnisräumen. Lehr-Lern-Prozesse initiieren die reflexive Begegnung mit diesen unterschiedlichen, sich ergänzenden Zugängen, womit das Ziel verbunden ist, den Lernenden Möglichkeiten für eine mehrperspektivische Betrachtung und Gestaltung von Wirklichkeit zu eröffnen.

In der Verschränkung mit den o. g. Sprachkompetenzen und lernstrategischen Fähigkeiten bilden diese vier Modi die Grundstruktur der Allgemeinbildung und geben damit einen Orientierungsrahmen für die schulische Bildung. Darauf gründen die Bildungsstandards, die am Ende der gymnasialen Oberstufe zu erreichen sind und als Grundlage für die Abiturprüfung dienen. Mit deren Bestehen dokumentieren die Lernenden, dass sie ihre fundierten Fachkenntnisse und Kompetenzen in innerfachlichen, fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen verständig nutzen können.

In der Realisierung eines diesem Verständnis folgenden Bildungsanspruchs verbinden sich zum einen Erwartungen der Schule an die Lernenden, zum anderen aber auch Erwartungen der Lernenden an die Schule.

Den Lehrkräften kommt die Aufgabe zu,

- Lernende darin zu unterstützen, sich aktiv und selbstbestimmt die Welt fortwährend lernend zu erschließen, eine Fragehaltung zu entwickeln sowie sich reflexiv und zunehmend differenziert mit den unterschiedlichen Modi der Weltbegegnung und Welterschließung zu beschäftigen,
- Lernende mit Respekt, Geduld und Offenheit sowie durch Anerkennung ihrer Leistungen und förderliche Kritik darin zu unterstützen, in einer komplexen Welt mit Herausforderun-

gen wie fortschreitender Technisierung, beschleunigtem globalen Wandel, der Notwendigkeit erhöhter Flexibilität und Mobilität, diversifizierten Formen der Lebensgestaltung angemessen umgehen zu lernen sowie kultureller Heterogenität und weltanschaulich-religiöser Pluralität mit Offenheit und Toleranz zu begegnen,

- Lernen in Gemeinschaft und das Schulleben mitzugestalten.

Aufgabe der Lernenden ist es,

- schulische Lernangebote als Herausforderungen zu verstehen und zu nutzen; dabei Disziplin und Durchhaltevermögen zu beweisen; das eigene Lernen und die Lernumgebungen aktiv mitzugestalten sowie eigene Fragen und Interessen, Fähigkeiten und Fertigkeiten bewusst einzubringen und zu mobilisieren; sich zu engagieren und sich anzustrengen,
- Lern- und Beurteilungssituationen zum Anlass zu nehmen, ein an Kriterien orientiertes Feedback einzuholen, konstruktiv mit Kritik umzugehen, sich neue Ziele zu setzen und diese konsequent zu verfolgen,
- Lernen in Gemeinschaft und das Schulleben mitzugestalten.

Die Entwicklung von Kompetenzen wird möglich, wenn Lernende sich mit komplexen und herausfordernden Aufgabenstellungen, die Problemlösen erfordern, auseinandersetzen, wenn sie dazu angeleitet werden, ihre eigenen Lernprozesse zu steuern sowie sich selbst innerhalb der curricularen und pädagogischen Rahmensetzungen Ziele zu setzen und damit an der Gestaltung des Unterrichts aktiv mitzuwirken. Solchermaßen gestalteter Unterricht bietet Lernenden Arbeitsformen und Strukturen, in denen sie wissenschaftspropädeutisches und berufsbezogenes Arbeiten in realitätsnahen Kontexten erproben und erlernen können. Es bedarf der Bereitstellung einer motivierenden Lernumgebung, die neugierig macht auf die Entdeckung bisher unbekannten Wissens, in der die Suche nach Verständnis bestärkt und Selbstreflexion gefördert wird. Und es bedarf Formen der Instruktion, der Interaktion und Kommunikation, die Diskurs und gemeinsame Wissensaneignung, aber auch das Selbststudium und die Konzentration auf das eigene Lernen ermöglichen.

1.2 Strukturelemente des Kerncurriculums

Das Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe formuliert Bildungsziele für fachliches (Bildungsstandards) und überfachliches Lernen sowie inhaltliche Vorgaben als verbindliche Grundlage für die Prüfungen im Rahmen des Landesabiturs. Die Leistungserwartungen werden auf diese Weise für alle, Lehrende wie Lernende, transparent und nachvollziehbar. Das Kerncurriculum ist in mehrfacher Hinsicht anschlussfähig: Es nimmt zum einen die Vorgaben in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) und den Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK) vom 18.10.2012 zu den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife in den Fächern Deutsch und Mathematik sowie in der fortgeführten Fremdsprache (Englisch, Französisch) auf. Zum anderen setzt sich in Anlage und Aufbau des Kerncurriculums die Kompetenzorientierung, wie bereits im Kerncurriculum für die Sekundarstufe I umgesetzt, konsequent fort – modifiziert in Darstellungsformat und Präzisionsgrad der verbindlichen inhaltlichen Vorgaben gemäß den Anforderungen in der gymnasialen Oberstufe und mit Blick auf die Abiturprüfung.

Das pädagogisch-didaktische Konzept der gymnasialen Oberstufe in Hessen, wie in Abschnitt 1.1 gekennzeichnet, bildet den Legitimationszusammenhang für das auf den Erwerb von Kompetenzen ausgerichtete Kerncurriculum mit seinen curricularen Festlegungen. Dies spiegelt sich in den einzelnen Strukturelementen wider:

Überfachliche Kompetenzen (Abschn. 1.3): Bildung, verstanden als sozialer Prozess fortwährender Selbstbildung und Selbsterziehung, zielt auf fachlichen und überfachlichen Kompetenzerwerb gleichermaßen. Daher sind im Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe neben den fachlichen Leistungserwartungen zunächst die wesentlichen Dimensionen und Aspekte überfachlicher Kompetenzentwicklung beschrieben.

Bildungsbeitrag und didaktische Grundlagen des Faches (Abschn. 2): Der „Beitrag des Faches zur Bildung“ (Abschn. 2.1) beschreibt den Bildungsanspruch und die wesentlichen Bildungsziele des Faches. Dies spiegelt sich in den Kompetenzbereichen (Abschn. 2.2 bzw. Abschn. 2.3 Naturwissenschaften, Mathematik, Informatik) und der Strukturierung der Fachinhalte (Abschn. 2.3 bzw. Abschn. 2.4 Naturwissenschaften, Mathematik, Informatik) wider. Die didaktischen Grundlagen, durch den Bildungsbeitrag fundiert, bilden ihrerseits die Bezugsfolie für die Konkretisierung in Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte.

Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte (Abschn. 3): Bildungsstandards weisen die Erwartungen an das fachbezogene Können der Lernenden am Ende der gymnasialen Oberstufe aus (Abschn. 3.2). Sie konkretisieren die Kompetenzbereiche und zielen grundsätzlich auf kritische Reflexionsfähigkeit sowie den Transfer bzw. das Nutzen von Wissen für die Bewältigung persönlicher und gesellschaftlicher Herausforderungen. In den vier Fächern, für die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.10.2012) vorliegen, werden diese i. d. R. wörtlich übernommen.

Die Lernenden setzen sich mit geeigneten und repräsentativen Lerninhalten und Themen, deren Sachaspekten und darauf bezogenen Fragestellungen auseinander und entwickeln auf diese Weise die in den Bildungsstandards formulierten fachlichen Kompetenzen. Entsprechend gestaltete Lernarrangements zielen auf den Erwerb jeweils bestimmter Kompetenzen aus i. d. R. unterschiedlichen Kompetenzbereichen. Auf diese Weise können alle Bildungsstandards mehrfach und in unterschiedlichen inhaltlichen Zusammenhängen erarbeitet werden. Hieraus erklärt sich, dass Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte nicht bereits im Kerncurriculum miteinander verknüpft werden, sondern dies erst sinnvoll auf der Unterrichtsebene erfolgen kann.

Die Lerninhalte sind in unmittelbarer Nähe zu den Bildungsstandards in Form verbindlicher Themen der Kurshalbjahre, gegliedert nach Themenfeldern, ausgewiesen (Abschn. 3.3). Hinweise zur Verbindlichkeit der Themenfelder finden sich im einleitenden Text zu Abschnitt 3.3 sowie in jedem Kurshalbjahr. Die Thematik eines Kurshalbjahres wird jeweils in einem einführenden Text skizziert und begründet. Im Sinne eines Leitgedankens stellt er die einzelnen Themenfelder in einen inhaltlichen Zusammenhang und zeigt Schwerpunktsetzungen für die Kompetenzanbahnung auf. Die Lerninhalte sind immer rückgebunden an die übergeordneten Erschließungskategorien bzw. Wissensdimensionen des Faches, um einen strukturierten und systematischen Wissensaufbau zu gewährleisten.

1.3 Überfachliche Kompetenzen

Für Lernende, die nach dem erfolgreichen Abschluss der gymnasialen Oberstufe ein Studium oder eine Berufsausbildung beginnen und die damit verbundenen Anforderungen erfolgreich meistern wollen, kommt dem Erwerb all jener Kompetenzen, die über das rein Fachliche hinausgehen, eine fundamentale Bedeutung zu – nur in der Verknüpfung mit personalen und sozialen Kompetenzen kann sich fachliche Expertise adäquat entfalten.

Daher liegt es in der Verantwortung aller Fächer, dass Lernende im fachgebundenen wie auch im projektorientiert ausgerichteten fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterricht ihre überfachlichen Kompetenzen weiterentwickeln können, auch im Hinblick auf eine kompetenz- und interessenorientierte sowie praxisbezogene Studien- und Berufsorientierung. Dabei kommt den Fächern Politik und Wirtschaft sowie Deutsch als „Kernfächer“ eine besondere Verantwortung zu, Lernangebote bereitzustellen, die den Lernenden die Möglichkeit eröffnen, ihre Interessen und Neigungen zu entdecken und die gewonnenen Informationen mit Blick auf ihre Ziele zu nutzen.

Überfachliche Kompetenzen umspannen ein weites Spektrum: Es handelt sich dabei um Fähigkeiten und Fertigkeiten genauso wie um Haltungen und Einstellungen. Mit ihnen stehen kulturelle Werkzeuge zur Verfügung, in denen sich auch normative Ansprüche widerspiegeln.

Im Folgenden werden die anzustrebenden überfachlichen Kompetenzen in sich ergänzenden und ineinandergreifenden gleichrangigen Dimensionen beschrieben:

Soziale Kompetenzen: sich verständigen und kooperieren; Verantwortung übernehmen und Rücksichtnahme praktizieren; im Team agieren; Konflikte aushalten, austragen und lösen; andere Perspektiven einnehmen; von Empathie geleitet handeln; sich durchsetzen; Toleranz üben; Zivilcourage zeigen: sich einmischen und in zentralen Fragen das Miteinander betreffend Stellung beziehen

Personale Kompetenzen: eigenständig und verantwortlich handeln und entscheiden; widerstandsfähig und widerständig sein; mit Irritationen umgehen; Dissonanzen aushalten; sich zutrauen, die eigene Person und inneres Erleben kreativ auszudrücken; divergent denken; fähig sein zu naturbezogenem sowie ästhetisch ausgerichtetem Erleben; sensibel sein für eigene Körperlichkeit und psychische Verfasstheit

Sprachkompetenzen (im Sinne eines erweiterten Sprachbegriffs): unterschiedliche Zeichensysteme beherrschen *(literacy)*: Verkehrssprache, Mathematik, Fremdsprachen, Naturwissenschaften, symbolisch-analoges Sprechen (wie etwa in religiösen Kontexten), Ästhetik, Informations- und Kommunikationstechnologien; sich in den unterschiedlichen Symbol- und Zeichengefügen ausdrücken und verständigen; Übersetzungsleistungen erbringen: Verständigung zwischen unterschiedlichen Sprachniveaus und Zeichensystemen ermöglichen

Wissenschaftspropädeutische Kompetenzen: fachliches Wissen nutzen und bewerten; die Perspektivität fachlichen Wissens reflektieren; Verfahren und Strategien der Argumentation anwenden; Zitierweisen beherrschen; Verständigung zwischen Laien und Experten initiieren und praktizieren; auf einem entwickelten / gesteigerten Niveau abstrahieren; in Modellen denken und modellhafte Vorstellungen als solche erkennen

Selbstregulationskompetenzen: Wissen unter Nutzung von Methoden der Selbstregulation erwerben; Lernstrategien sowohl der Zielsetzung und Zielbindung als auch der Selbstbeobachtung *(self-monitoring)* anwenden; Probleme im Lernprozess wahrnehmen, analysieren und Lösungsstrategien entwickeln; eine positive Fehler-Kultur aufbauen; mit Enttäuschungen und Rückschlägen umgehen; sich im Spannungsverhältnis zwischen Fremd- und Selbstbestimmung orientieren

Involvement: sich (auf etwas) einlassen; für eine Sache fiebern; sich motiviert fühlen und andere motivieren; von epistemischer Neugier geleitete Fragen formulieren; sich vertiefen, etwas herausbekommen, einer Sache / Fragestellung auf den Grund gehen; etwas vollenden; (etwas) durchhalten; eine Arbeitshaltung kultivieren (sich Arbeitsschritte vornehmen, Arbeitserfolg kontrollieren)

Wertbewusste Haltungen: um Kategorien wie Respekt, Gerechtigkeit, Fairness, Kostbarkeit, Eigentum und deren Stellenwert für das Miteinander wissen; friedliche Gesinnung im Geiste der Völkerverständigung praktizieren, ethische Normen sowie kulturelle und religiöse Werte kennen, reflektieren und auf dieser Grundlage eine Orientierung für das eigene Handeln gewinnen; demokratische Normen und Werthaltungen im Sinne einer historischen Weltsicht reflektieren und Rückschlüsse auf das eigene Leben in der Gemeinschaft ziehen; selbstbestimmt urteilen und handeln

Interkulturelle Kompetenz (im Sinne des Stiftens kultureller Kohärenz): Menschen aus verschiedenen soziokulturellen Kontexten und Kulturen vorurteilsfrei und im Handeln reflektiert begegnen; sich kulturell unterschiedlich geprägter Identitäten, einschließlich der eigenen, bewusst sein; die unverletzlichen und unveräußerlichen Menschenrechte achten und sich an den wesentlichen Traditionen der Aufklärung orientieren; wechselnde kulturelle Perspektiven einnehmen, empathisch und offen das Andere erleben; Ambiguitätstoleranz üben

Mit Blick auf gesellschaftliche Entwicklungen und die vielfältigen damit verbundenen Herausforderungen für junge Erwachsene zielt der Erwerb fachlicher und überfachlicher Kompetenzen insbesondere auf die folgenden drei Dimensionen, die von übergreifender Bedeutung sind:

Demokratie und Teilhabe / zivilgesellschaftliches Engagement: sozial handeln, politische Verantwortung übernehmen; Rechte und Pflichten in der Gesellschaft wahrnehmen; sich einmischen, mitentscheiden und mitgestalten; sich persönlich für das Gemeinwohl engagieren (aktive Bürgerschaft); Fragen des Zusammenlebens der Geschlechter / Generationen / sozialen Gruppierungen reflektieren; Innovationspotenzial zur Lösung gesellschaftlicher Probleme des sozialen Miteinanders entfalten und einsetzen; entsprechende Kriterien des Wünschenswerten und Machbaren differenziert bedenken

Nachhaltigkeit / Lernen in globalen Zusammenhängen: globale Zusammenhänge bezogen auf ökologische, soziale und ökonomische Fragestellungen wahrnehmen, analysieren und darüber urteilen; Rückschlüsse auf das eigene Handeln ziehen; sich mit den Fragen, die im Zusammenhang des wissenschaftlich-technischen Fortschritts aufgeworfen werden, auseinandersetzen; sich dem Diskurs zur nachhaltigen Entwicklung stellen, sich für nachhaltige Entwicklung engagieren

Selbstbestimmtes Leben in der mediatisierten Welt: den Einfluss von digitaler Kommunikation auf eigenes Erleben und persönliche Erfahrungen wahrnehmen und reflektieren; den medialen Einfluss auf Alltag und soziale Beziehungen sowie Kultur und Politik wahrnehmen, analysieren und beurteilen, damit verbundene Chancen und Risiken erkennen; Unterschiede zwischen unmittelbaren persönlichen Erfahrungen und solchen in „digitalen Welten“ identifizieren und auch im „online-Modus“ ethisch verantwortungsvoll handeln; einen selbstbestimmten Umgang mit sozialen Netzwerken im Spannungsfeld zwischen Wahrung der Privatsphäre und Teilhabe an einer globalisierten Öffentlichkeit praktizieren; in der mediatisierten Welt eigene Interessen und Bedürfnisse wahrnehmen

2 Bildungsbeitrag und didaktische Grundlagen des Faches

2.1 Beitrag des Faches zur Bildung[1]

Der spezifische Beitrag des Faches Mathematik zu den in Abschnitt 1 beschriebenen Bildungszielen der gymnasialen Oberstufe besteht darin, jedem Lernenden drei Grunderfahrungen[2] zu ermöglichen, nämlich

- Erscheinungen der Welt um uns, aus Natur, Technik, Gesellschaft und Kultur mithilfe der Mathematik wahrzunehmen, zu verstehen und zu beurteilen (Mathematik als Werkzeug),
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen (Mathematik als Strukturwissenschaft),
- in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen, insbesondere heuristische Fähigkeiten (Mathematik als Schule des Denkens).

2.2 Kompetenzmodell

Das Kompetenzmodell für das Unterrichtsfach Mathematik unterscheidet zwischen

- den **allgemeinen mathematischen Kompetenzen**, die wesentliche Bereiche mathematischen Arbeitens erfassen,
- den mathematischen **Leitideen**, die wesentliche inhaltliche Kernbereiche abdecken, sowie
- den **Anforderungsbereichen**, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener Tätigkeiten beschreiben.

Allgemeine mathematische Kompetenzen beschreiben kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die zwar fachspezifisch geprägt, aber nicht an spezielle mathematische Inhalte gebunden sind. Sie können von den Lernenden allerdings nur in der aktiven Auseinandersetzung mit konkreten Fachinhalten erworben werden. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen manifestieren sich in jedem einzelnen mathematischen Inhalt, d. h. allgemeine mathematische Kompetenzen und Inhalte sind untrennbar miteinander verknüpft (in der Abbildung durch ein zweidimensionales Raster angedeutet). Es lässt sich erst dann vom hinreichenden Erwerb einer allgemeinen mathematischen Kompetenz sprechen, wenn diese in der Auseinandersetzung mit ganz unterschiedlichen Leitideen in allen drei Anforderungsbereichen erfolgreich eingesetzt werden kann.

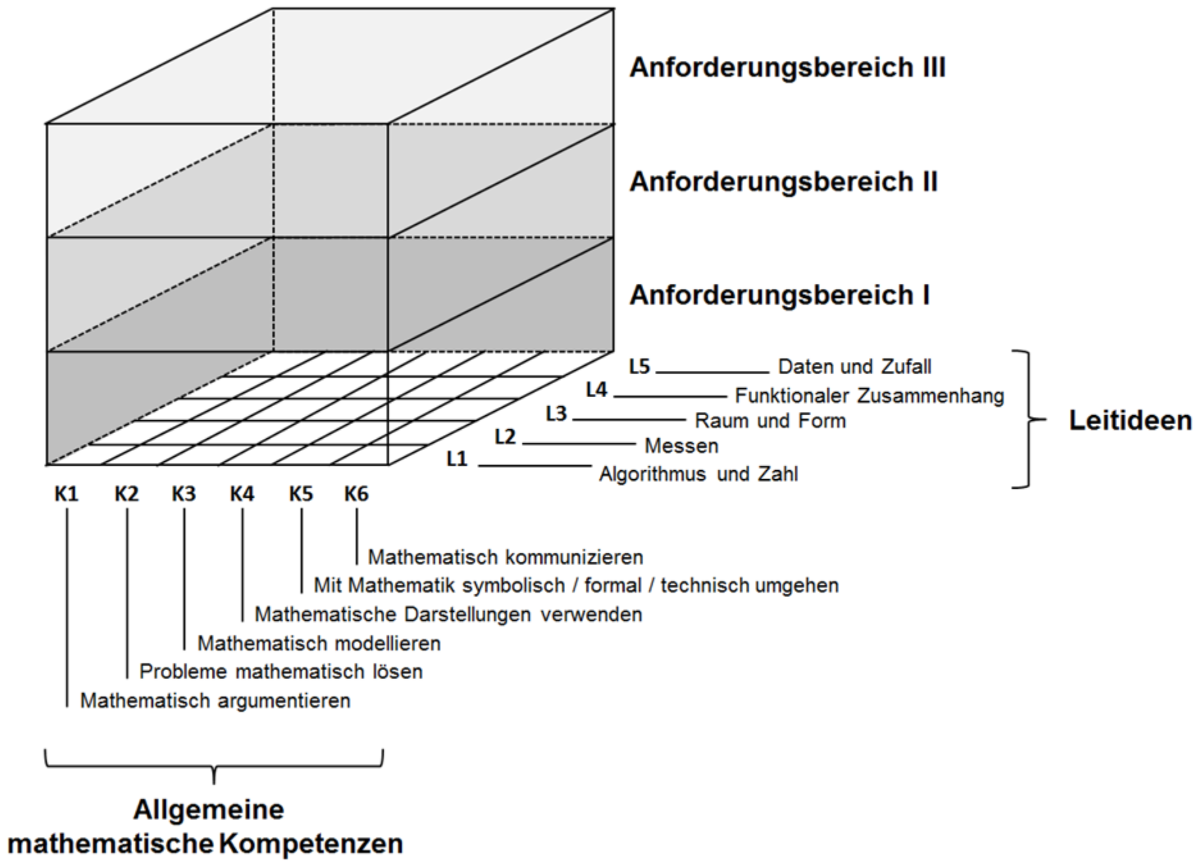
Das Kompetenzmodell unterstützt die Übersetzung abstrakter Bildungsziele in konkrete Aufgabenstellungen und Unterrichtsvorhaben. Es stellt somit ein Bindeglied zwischen den Kompetenzen und den Aufgaben im Unterricht und in Prüfungssituationen dar. Die Unterscheidung in drei Dimensionen ist sowohl bei der Konstruktion neuer als auch bei der Analyse gegebener Aufgaben hilfreich.

---

[1] Teile der nachfolgenden Abschnitte sind in wörtlicher oder modifizierter Form den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) entnommen.

[2] Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. GDM-Mitteilungen, Heft 61, 1995

Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen und Kenntnisse sind dabei unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden hier beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein.



Kompetenzmodell

2.3 Kompetenzbereiche (allgemeine mathematische Kompetenzen)

Es werden sechs allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden, die das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II in hinreichender Breite erfassen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, diese Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Es ist vielmehr typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden, wobei sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig partiell durchdringen.

Mathematisch argumentieren (K1)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis hin zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“

Probleme mathematisch lösen (K2)

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis hin zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.

Mathematisch modellieren (K3)

Diese Kompetenz umfasst den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis hin zu komplexen Modellierungen.

Mathematische Darstellungen verwenden (K4)

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis hin zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.

Mit Mathematik symbolisch / formal / technisch umgehen (K5)

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierenden Bewertung. Diese Kompetenz umfasst auch die Nutzung von Faktenwissen und grundlegendem Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

Mathematisch kommunizieren (K6)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fach-sprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Das Erfüllen sprachlicher Anforderungen spielt bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

Kompetenzerwerb in fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen

Fachübergreifende und fächerverbindende Lernformen ergänzen fachliches Lernen in der gymnasialen Oberstufe und sind unverzichtbarer Bestandteil des Unterrichts (vgl. § 7 Abs. 7 OAVO[3]). In diesem Zusammenhang gilt es insbesondere auch, die Kompetenzbereiche der Fächer zu verbinden und dabei zugleich die Dimensionen überfachlichen Lernens sowie die besonderen Bildungs- und Erziehungsaufgaben, erfasst in Aufgabengebieten (vgl. § 6 Abs. 4 HSchG), zu berücksichtigen. So können Synergiemöglichkeiten ermittelt und genutzt werden. Für die Lernenden ist diese Vernetzung zugleich Voraussetzung und Bedingung dafür, Kompetenzen in vielfältigen und vielschichtigen inhaltlichen Zusammenhängen und Anforderungssituationen zu erwerben.

Damit sind zum einen Unterrichtsvorhaben gemeint, die mehrere Fächer gleichermaßen berühren und unterschiedliche Zugangsweisen der Fächer integrieren. So lassen sich z. B. in Projekten – ausgehend von einer komplexen problemhaltigen Fragestellung – fachübergreifend und fächerverbindend und unter Bezugnahme auf die drei herausgehobenen überfachlichen Dimensionen komplexere inhaltliche Zusammenhänge und damit Bildungsstandards aus den unterschiedlichen Kompetenzbereichen der Fächer erarbeiten (vgl. Abschn. 1.3). Zum anderen können im Fachunterricht Themenstellungen bearbeitet werden, die – ausgehend vom Fach und einem bestimmten Themenfeld – auch andere, eher benachbarte Fächer berühren. Dies erweitert und ergänzt die jeweilige Fachperspektive und trägt damit zum vernetzten Lernen bei.

2.4 Strukturierung der Fachinhalte (Leitideen)

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das permanente Zusammenspiel von allgemeinen mathematischen Kompetenzen und mathematischen Inhalten. Insofern sind die in der Sekundarstufe II verbindlichen Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. Unter „Inhalten" werden dabei insbesondere auch adäquate Vorstellungen verstanden, die ein Verständnis von mathematischen Inhalten erst konstituieren. Die mathematischen Inhalte werden jeweils übergreifenden Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser klassischen Sachgebiete bei.

Nachfolgend werden die einzelnen Leitideen näher erläutert. Sie bilden den strukturellen Hintergrund des Unterrichts, um ein tragfähiges Gerüst für Wissensnetze aufzubauen. Die genannten inhaltlichen Bezüge sind immer in Weiterführung der Inhalte im Unterricht der Sekundarstufe I zu sehen.

[3] Oberstufen- und Abiturverordnung (OAVO) in der jeweils geltenden Fassung

Algorithmus und Zahl (L1)

Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff, wie er in der Sekundarstufe I verwendet wird, zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der Analysis und die Lineare Algebra.

Messen (L2)

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen, wie es aus dem Unterricht der Sekundarstufe I bekannt ist, um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Analysis, die Analytische Geometrie und die Stochastik.

Raum und Form (L3)

Diese Leitidee ist auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, wie es die Lernenden in der Sekundarstufe I ausgebildet haben, gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten im Raum. Es geht hier sowohl um Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte als auch um Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware.

Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die Analytische Geometrie.

Funktionaler Zusammenhang (L4)

Diese Leitidee ist darauf gerichtet, die funktionalen Vorstellungen der Lernenden aus dem Unterricht der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern, auch in stochastischen Kontexten. Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die Analysis und die Stochastik.

Daten und Zufall (L5)

Diese Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen, wie sie in der Sekundarstufe I entwickelt wurden, umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software.

Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die Stochastik.

Legitimation der Themen der Kurshalbjahre

Die drei folgenden klassischen Sachgebiete stellen eine konsequente inhaltliche Fortführung der Mathematik der Sekundarstufe I dar. Ihnen kommt auch aus Sicht der übergeordneten Leitideen eine zentrale Bedeutung für die gymnasiale Schulbildung im Fach Mathematik zu, weil jedes dieser Gebiete gleich mehrere Leitideen berücksichtigt:

1. Die Analysis als Grundlage fundamentaler mathematischer Begriffe und Verfahren zur Beschreibung von funktionalen Zusammenhängen und Veränderungsprozessen: In ihr werden die Leitideen L1, L2 und L4 umgesetzt.
2. Die Lineare Algebra und Analytische Geometrie mit ihren Methoden zur Algebraisierung und zur analytischen Beschreibung von geometrischen Objekten des Raumes sowie der Verallgemeinerung des Zahlbegriffs durch Vektoren und Matrizen: Sie trägt als einziges Sachgebiet zur Umsetzung der Leitidee L3 bei, außerdem werden die Leitideen L1 und L2 angesprochen.
3. Die Stochastik mit der Möglichkeit zur quantitativen Beschreibung von Zufallsvorgängen und zur Beurteilung ihrer Ergebnisse: Sie trägt als einziges Sachgebiet zur Umsetzung der Leitidee L5 bei, darüber hinaus gibt es Bezüge zu den Leitideen L2 und L4.

Aufgrund dieser zentralen Bedeutung sind die folgenden Themen der Kurshalbjahre von der Einführungsphase bis zum Kurshalbjahr Q3 der Qualifikationsphase verbindlich vorgegeben:

Einführungsphase	E1/E2	Analysis I
Qualifikationsphase	Q1	Analysis II
	Q2	Lineare Algebra und Analytische Geometrie
	Q3	Stochastik

2.5 Digitale Mathematikwerkzeuge

Neben der Nutzung einer Formelsammlung und der Verwendung anschaulicher Modelle sind es vor allem digitale Mathematikwerkzeuge, die Lernprozesse unterstützen. Darunter fallen Taschenrechner mit erweiterten Funktionalitäten, dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogramme, Funktionenplotter und Computeralgebrasysteme.

Ihr Wert zeigt sich insbesondere

- bei Visualisierungen mathematischer Inhalte mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,

- beim Experimentieren und Entdecken mathematischer Zusammenhänge,
- beim Modellieren von Realsituationen im Umgang mit konkretem umfangreichen Datenmaterial,
- bei der Reduktion schematischer Abläufe,
- beim Bearbeiten einer Aufgabe durch die Möglichkeit verschiedener Zugänge unter Berücksichtigung individueller Präferenzen im Denken und Lernen und
- bei der reflektierten Nutzung als Kontrollmöglichkeit.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge ergänzt händische Fertigkeiten der Lernenden; er ersetzt sie nicht. Ziel ist es beispielsweise, dass Lernende in der Lage sind, einerseits einfache Gleichungen und Gleichungssysteme per Hand zu lösen, andererseits digitale Werkzeuge angemessen zum Lösen einzusetzen.

Abhängig von den für den jeweiligen Abiturjahrgang verbindlichen Themenfeldern müssen die Lernenden unabhängig von der Rechnertechnologie die erweiterten Funktionalitäten des Taschenrechners in der Abiturprüfung einsetzen können zur Bestimmung

- der Lösungen von Polynomgleichungen bis dritten Grades,
- der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten,
- von Ableitungen an einer Stelle,
- von bestimmten Integralen,
- von Gleichungen von Regressionsgeraden,
- von 2x2- und 3x3-Matrizen (Produkt, Inverse),
- von Mittelwert und Standardabweichung bei statistischen Verteilungen,
- von Werten der Binomial- und Normalverteilung.

Diese Aufstellung kann durch Erlass ergänzt werden.

Beim Einsatz von Taschenrechnern sind besondere Anforderungen an die Dokumentation von Lösungswegen in Form schriftlicher Erläuterungen zu stellen, wenn Teillösungen durch den Rechner übernommen werden. Dabei ist auf eine korrekte mathematische Schreibweise zu achten; rechnerspezifische Schreibweisen (z. B. $\mathrm{binomcdf}(100, 0.5, 60)$ anstelle von $P(X \leq 60) = F(100; 0,5; 60)$) sind zu vermeiden.

3 Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte

3.1 Einführende Erläuterungen

Nachfolgend werden die am Ende der gymnasialen Oberstufe erwarteten fachlichen Kompetenzen in Form von Bildungsstandards, gegliedert nach Kompetenzbereichen (Abschn. 3.2), sowie die verbindlichen Unterrichtsinhalte (Abschn. 3.3), thematisch strukturiert in Kurshalbjahre und Themenfelder, aufgeführt. Diese sind durch verbindlich zu bearbeitende inhaltliche Aspekte konkretisiert und durch ergänzende Erläuterungen didaktisch fokussiert.

Im Unterricht werden Bildungsstandards und Themenfelder so zusammengeführt, dass die Lernenden in unterschiedlichen inhaltlichen Kontexten die Bildungsstandards – je nach Schwerpunktsetzung – erarbeiten können. Mit wachsenden Anforderungen an die Komplexität der Zusammenhänge und kognitiven Operationen entwickeln sie in entsprechend gestalteten Lernumgebungen ihre fachlichen Kompetenzen weiter.

Die Themenfelder bieten die Möglichkeit – im Rahmen der Unterrichtsplanung didaktisch-methodisch aufbereitet – jeweils in thematische Einheiten umgesetzt zu werden. Zugleich lassen sich, themenfeldübergreifend, inhaltliche Aspekte der Themenfelder, die innerhalb eines Kurshalbjahres vielfältig miteinander verschränkt sind und je nach Kontext auch aufeinander aufbauen können, in einen unterrichtlichen Zusammenhang stellen.

Themenfelder und inhaltliche Aspekte sind über die Kurshalbjahre hinweg so angeordnet, dass im Verlauf der Lernzeit – auch Kurshalbjahre übergreifend – immer wieder Bezüge zwischen den Themenfeldern hergestellt werden können. In diesem Zusammenhang bieten die Leitideen (vgl. ausführliche Darstellung in Abschn. 2.4) Orientierungshilfen, um fachliches Wissen zu strukturieren, anschlussfähig zu machen und zu vernetzen.

Die Bildungsstandards sind nach Anforderungsbereichen differenziert. In den Kurshalbjahren der Qualifikationsphase werden die Fachinhalte nach grundlegendem Niveau (Grundkurs und Leistungskurs) und erhöhtem Niveau (Leistungskurs) unterschieden. Die jeweils fachbezogenen Anforderungen, die an Lernende in Grund- und Leistungskurs gestellt werden, unterscheiden sich wie folgt: „Grundkurse vermitteln grundlegende wissenschaftspropädeutische Kenntnisse und Einsichten in Stoffgebiete und Methoden, Leistungskurse exemplarisch vertieftes wissenschaftspropädeutisches Verständnis und erweiterte Kenntnisse“ (§ 8 Abs. 2 OAVO). Hierzu gehört insbesondere auch ein erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad.

3.2 Bildungsstandards (allgemeine mathematische Kompetenzen)[4]

Im Folgenden werden die sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzbereiche, die in Abschnitt 2.3 beschrieben werden, präzisiert, insbesondere auch durch ihre jeweiligen Ausprägungen in den drei Anforderungsbereichen.

Kompetenzbereich: Mathematisch argumentieren (K1)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

K1.1 ▪ Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen usw.) wiedergeben und anwenden,

K1.2 ▪ einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen,

K1.3 ▪ auf der Basis von Alltagswissen argumentieren.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

K1.4 ▪ überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

K1.5 ▪ Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln,

K1.6 ▪ verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten.

Kompetenzbereich: Probleme mathematisch lösen (K2)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

K2.1 ▪ einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden.

[4] Die Formulierungen der Bildungsstandards sind – mit Ausnahme einer sprachlichen Anpassung von K1.3 – in wörtlicher Form den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) entnommen.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

K2.2 ■ einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

K2.3 ■ eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden.

Kompetenzbereich: Mathematisch modellieren (K3)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

K3.1 ■ vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden,

K3.2 ■ eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen,

K3.3 ■ ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

K3.4 ■ mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen,

K3.5 ■ Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren,

K3.6 ■ ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

K3.7 ■ eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen,

K3.8 ■ mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten.

Kompetenzbereich: Mathematische Darstellungen verwenden (K4)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

K4.1 ■ Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

- **K4.2** gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern,
- **K4.3** zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

- **K4.4** mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen,
- **K4.5** eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln,
- **K4.6** verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen.

Kompetenzbereich: Mit Mathematik symbolisch / formal / technisch umgehen (K5)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

- **K5.1** elementare Lösungsverfahren verwenden,
- **K5.2** Formeln und Symbole direkt anwenden,
- **K5.3** mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

- **K5.4** formale mathematische Verfahren anwenden,
- **K5.5** mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen,
- **K5.6** mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

- **K5.7** komplexe Verfahren durchführen,
- **K5.8** verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten,
- **K5.9** die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren.

Kompetenzbereich: Mathematisch kommunizieren (K6)

Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

- **K6.1** einfache mathematische Sachverhalte darlegen,
- **K6.2** Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt.

Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

- **K6.3** mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen,
- **K6.4** Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren,
- **K6.5** mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss.

Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

- **K6.6** eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren,
- **K6.7** mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen,
- **K6.8** mündliche und schriftliche Äußerungen anderer Personen mit mathematischem Gehalt miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren.

3.3 Kurshalbjahre und Themenfelder

Dem Unterricht in der **Einführungsphase** kommt mit Blick auf den Übergang in die Qualifikationsphase eine Brückenfunktion zu. Zum einen erhalten die Lernenden die Möglichkeit, das in der Sekundarstufe I erworbene Wissen und Können zu festigen und zu vertiefen bzw. zu erweitern (Kompensation) sowie Neigungen und Stärken zu identifizieren, um auf die Wahl der Grundkurs- und Leistungskursfächer entsprechend vorbereitet zu sein. Zum anderen werden die Lernenden an das wissenschaftspropädeutische Arbeiten herangeführt. Damit wird eine solide Ausgangsbasis geschaffen, um in der Qualifikationsphase erfolgreich zu lernen. Die Themenfelder der Einführungsphase sind dementsprechend ausgewählt und bilden die Basis für die Qualifikationsphase.

In der **Qualifikationsphase** erwerben die Lernenden eine solide Wissensbasis sowohl im Fachunterricht als auch in fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen und wenden ihr Wissen bei der Lösung zunehmend anspruchsvoller und komplexer Frage- und Problemstellungen an. Dabei erschließen sie Zusammenhänge zwischen Wissensbereichen und erlernen Methoden und Strategien zur systematischen Beschaffung, Strukturierung und Nutzung von Informationen und Materialien. Der Unterricht in der Qualifikationsphase zielt auf selbstständiges und eigenverantwortliches Lernen und Arbeiten sowie auf die Weiterentwicklung der Kommunikationsfähigkeit; der Erwerb einer angemessenen Fachsprache ermöglicht die Teilhabe am fachbezogenen Diskurs. Durch die Wahl von Grund- und Leistungskursen ist die Möglichkeit gegeben, individuelle Schwerpunkte zu setzen und auf unterschiedlichen Anspruchsebenen zu lernen. Dementsprechend beschreiben die Bildungsstandards und die verbindlichen Themenfelder die Leistungserwartungen für das Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife.

Verbindliche Regelungen zur Bearbeitung der Themenfelder

Einführungsphase

In der Einführungsphase sind die Themenfelder 1–6 verbindliche Grundlage des Unterrichts. Die „z. B.“-Nennungen in den Themenfeldern dienen der inhaltlichen Anregung und sind nicht verbindlich. Soweit sich eine bestimmte Reihenfolge der Themenfelder bzw. ihrer Inhalte nicht aus fachlichen Erfordernissen ableitet, kann die Reihenfolge frei gewählt werden. Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder sind etwa zwei Drittel der gemäß OAVO zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit – i. d. R. ca. 24 Unterrichtswochen – vorgesehen. In der verbleibenden Unterrichtszeit ist es möglich, Aspekte der verbindlichen Themenfelder zu vertiefen oder zu erweitern oder eines der nicht verbindlichen Themenfelder zu bearbeiten.

Qualifikationsphase

In den Kurshalbjahren Q1 bis Q3 sind die Themenfelder 1 bis 3 verbindliche Grundlage des Unterrichts. Ein weiteres Themenfeld wird durch Erlass verbindlich festgelegt. Im Hinblick auf die schriftlichen Abiturprüfungen können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen innerhalb dieser Themenfelder ausgewiesen werden. Im Kurshalbjahr Q4 werden Themenfelder mit prozessbezogenem Schwerpunkt und Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt angeboten. Aus jedem der beiden Bereiche ist je ein Themenfeld – ausgewählt durch die Lehrkraft – verbindliche Grundlage des Unterrichts. Anstelle der im Kurshalbjahr Q4 aufgeführten Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt kann auch ein Themenfeld aus den Kurshalbjahren Q1 bis Q3 gewählt werden, das für den jeweiligen Abiturjahrgang nicht verbindlich festgelegt ist und in den vorangegangenen Kurshalbjahren noch nicht bearbeitet wurde. Die „z. B.“-Nennungen in den Themenfeldern dienen der inhaltlichen Anregung und sind nicht verbindlich. Soweit sich eine bestimmte Reihenfolge der Themenfelder bzw. ihrer Inhalte nicht aus fachlichen Erfordernissen ableitet, kann die Reihenfolge frei gewählt werden. Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder sind etwa zwei Drittel der gemäß OAVO zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit – i. d. R. ca. 12 Unterrichtswochen – vorgesehen. In der verbleibenden Unterrichtszeit ist es möglich, Aspekte der verbindlichen Themenfelder zu vertiefen oder zu erweitern oder eines der nicht verbindlichen Themenfelder zu bearbeiten.

Übersicht über die Themen der Kurshalbjahre und die Themenfelder

Einführungsphase (E)

E1/E2	**Analysis I**
Themenfelder	
E.1	**Funktionen und ihre Darstellung**
E.2	**Einführung des Ableitungsbegriffs**
E.3	**Anwendungen des Ableitungsbegriffs**
E.4	**Exponentialfunktionen**
E.5	**Trigonometrische Funktionen**
E.6	**Weitere Ableitungsregeln**
E.7	Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungen
E.8	Folgen und Reihen

verbindlich: Themenfelder 1–6

Qualifikationsphase (Q)

Q1	**Analysis II**
Themenfelder	
Q1.1	**Einführung in die Integralrechnung**
Q1.2	**Anwendungen der Integralrechnung**
Q1.3	**Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung**
Q1.4	Funktionenscharen
Q1.5	Approximation
Q1.6	Weitere Anwendungen der Integralrechnung

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–6, durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Q2	**Lineare Algebra und Analytische Geometrie**
Themenfelder	
Q2.1	**Lineare Gleichungssysteme (LGS)**
Q2.2	**Orientieren und Bewegen im Raum**
Q2.3	**Geraden und Ebenen im Raum**
Q2.4	Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen
Q2.5	Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen

Q2.6	Vertiefung der Analytischen Geometrie (nur Grundkurs)

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–5 bzw. 4–6 (für Grundkurse), durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Q3	**Stochastik**
Themenfelder	
Q3.1	**Grundlegende Begriffe der Stochastik**
Q3.2	**Berechnung von Wahrscheinlichkeiten**
Q3.3	**Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
Q3.4	Hypothesentests (für binomialverteilte Zufallsgrößen)
Q3.5	Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–5, durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Q4	**Themenfelder mit prozess- bzw. inhaltsbezogenem Schwerpunkt**
Themenfelder mit prozessbezogenem Schwerpunkt	
Q4.1	Argumentieren und Beweisen
Q4.2	Problemlösen
Q4.3	Modellieren
Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt	
Q4.4	Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Q4.5	Numerische Optimierung
Q4.6	Kreis und Kugel
Q4.7	Weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Q4.8	Komplexe Zahlen
Q4.9	Graphentheorie

verbindlich: eines der Themenfelder 1–3 sowie entweder eines der Themenfelder 4–9 oder eines der Themenfelder aus Q1–Q3, das für den jeweiligen Abiturjahrgang nicht verbindlich festgelegt ist und in den vorangegangenen Kurshalbjahren noch nicht bearbeitet wurde, jeweils ausgewählt durch die Lehrkraft

Im Zusammenhang der Bearbeitung der Themen der Kurshalbjahre und der Themenfelder des Faches lassen sich vielfältig Bezüge auch zu Themenfeldern anderer Fächer (innerhalb eines Kurshalbjahres) herstellen, um sich komplexeren Fragestellungen aus unterschiedlichen Fachperspektiven zu nähern. Auf diese Weise erfahren die Lernenden die Notwendigkeit und Wirksamkeit interdisziplinärer Kooperation und erhalten gleichzeitig Gelegenheit, ihre fachspezifischen Kenntnisse in anderen Kontexten zu erproben und zu nutzen. Dabei erwerben sie neues Wissen, welches die Fachdisziplinen verbindet. Dies bereitet sie auf den Umgang mit vielschichtigen und vielgestaltigen Problemlagen vor und fördert eine systemische Sichtweise. Durch fachübergreifende und fächerverbindende Themenstellungen können mit dem Anspruch einer stärkeren Lebensweltorientierung auch die Interessen und Fragestellungen, die junge Lernende bewegen, Berücksichtigung finden. In der Anlage der Themenfelder in den Kurshalbjahren sind – anknüpfend an bewährte Unterrichtspraxis – fachübergreifende und fächerverbindende Bezüge jeweils mitgedacht. Dies erleichtert die Kooperation zwischen den Fächern und ermöglicht interessante Themenstellungen.

E1/E2 Analysis I

Zahlreiche Phänomene im Alltag und in den Wissenschaften erfordern die Beschreibung eines Bestands und dessen Änderung. Im Mathematikunterricht der Grundschule haben die Lernenden erste Erfahrungen mit absoluten Änderungen gesammelt und diese in der Bruch- und Prozentrechnung der Sekundarstufe I mithilfe von relativen Änderungen vertieft. Bei der Betrachtung linearer Funktionen sind ihnen konstante Änderungsraten begegnet. Mit den Begriffen der durchschnittlichen und lokalen Änderungsrate und schließlich dem Ableitungsbegriff stellt die Analysis nun Werkzeuge bereit, um Veränderungsprozesse mit nicht konstanten Änderungsraten genauer zu untersuchen. Typische Fragestellungen aus Natur, Gesellschaft, Technik oder Wirtschaft eröffnen die Möglichkeit, den Anwendungsaspekt der Analysis zu verdeutlichen. Gleichzeitig können dadurch in besonderer Weise die Modellierungs- und Problemlösekompetenzen der Lernenden entwickelt werden.

Grundlage der Analysis bildet die Darstellung funktionaler Zusammenhänge mithilfe von Wertetabellen, Graphen und Funktionsgleichungen. Dabei wird der Funktionsbegriff, der in der Sekundarstufe I erarbeitet wurde, vertiefend wiederholt. Neben linearen und quadratischen Funktionen werden ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen untersucht. Die Lernenden arbeiten charakteristische Eigenschaften dieser Funktionsklassen heraus, so dass sie diese auch zur Modellierung von Sachzusammenhängen verwenden können. Um typische Anwendungssituationen aufzuzeigen, werden dabei Daten aus Realsituationen einbezogen. Für Modellierungen mit Exponentialfunktionen eignen sich beispielsweise Daten zum Wachstum von Populationen oder zum Abbau der Konzentration medizinischer Wirkstoffe im Körper, für Modellierungen mit trigonometrischen Funktionen eignen sich z. B. Daten von Gezeitenständen oder von elektromagnetischen Schwingungen.

Die zentrale neue Idee der Analysis ist der Ableitungsbegriff. Die Einführung der Ableitung kann über ein Beispiel aus einem realen Kontext erfolgen, bei dem der Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate aus der Sachsituation heraus motiviert ist, etwa beim Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit. Alternativ kann die Einführung der Ableitung stärker die geometrische Sichtweise betonen, indem zuerst nach der Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen gefragt wird. Unabhängig von der Wahl des Zugangs wird in jedem Fall der Zusammenhang zwischen Änderungsraten und Sekanten- bzw. Tangentensteigungen hergestellt. Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten ist das Kernstück der infinitesimalen Sichtweise auf Veränderungsprozesse, die auf Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht. Dafür benötigen die Lernenden einen propädeutischen Grenzwertbegriff, d. h. adäquate und ausbaufähige Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten, die sie durch die Untersuchung von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen entwickeln können.

Mit den Ableitungsregeln eignen sich die Lernenden grundlegende Techniken der Differenzialrechnung an und wenden diese zunächst auf die Untersuchung ganzrationaler Funktionen an. Dabei ist entscheidend, dass sie mit den Techniken zugleich qualitative Vorstellungen zu Veränderungsprozessen entwickeln, die über ein einseitiges Kalkültraining hinausgehen. Dazu eignen sich insbesondere Aufgaben, bei denen die Lernenden Änderungsraten in Sachkontexten berechnen und deuten, oder solche, bei denen sie grafisch ableiten und die wechselseitigen Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen ihrer Ableitung begründen.

Im Rahmen der Anwendung des Ableitungsbegriffs bestimmen die Lernenden Funktionen, die Realsituationen beschreiben, und interpretieren Ergebnisse im Kontext. Anhand von Extremalproblemen wird ihnen deutlich, wie mithilfe der Analysis Lösungen gefunden werden können. Dabei sind sowohl innermathematische als auch lebensweltbezogene Problemstellungen wie z. B. Verpackungsprobleme oder Fragen der Gewinnoptimierung einzubeziehen.

Darüber hinaus wenden die Lernenden den Ableitungsbegriff an, um die Ableitungen der Exponentialfunktion (e-Funktion) sowie der trigonometrischen Funktionen zu bestimmen. Mit der Produkt- und Kettenregel sind sie zudem in der Lage, komplexere Funktionen abzuleiten.

Um Freiräume zur Förderung des Modellierens und Problemlösens zu schaffen und auch komplexere funktionale Zusammenhänge einzubeziehen, werden im Analysis-Unterricht die Möglichkeiten digitaler Werkzeuge genutzt. Insbesondere verwenden die Lernenden Rechner, um Gleichungen und Gleichungssysteme zu lösen, den Wert der Ableitung einer Funktion an einer Stelle zu bestimmen und die Bedeutung von Parametern in Funktionstermen zu untersuchen.

Bezug zu den Leitideen: Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

Themenfelder

verbindlich: Themenfelder 1–6

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (z. B. 4 Wochen für Themenfeld 1, 5 Wochen für Themenfeld 2, 6 Wochen für Themenfeld 3, 4 Wochen für Themenfeld 4, 3 Wochen für Themenfeld 5 und 2 Wochen für Themenfeld 6). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird i. d. R. ein zeitlicher Gesamtumfang von ca. 24 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

E.1 Funktionen und ihre Darstellung

- Erarbeiten grundlegender Begriffe und Eigenschaften:

  Definitionsmenge, Wertemenge, Wertetabelle, grafische Darstellung, Funktionsgleichung/ -term, Symmetrie von Funktionsgraphen, Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen (jeweils in x- und y-Richtung)
- Bestimmen besonderer Punkte:

  grafisches und rechnerisches Bestimmen von Achsenschnittpunkten und Schnittpunkten zweier Graphen, insbesondere bei linearen und quadratischen Funktionen
- Modellieren von Realsituationen durch geeignete Funktionsklassen, insbesondere mithilfe von linearen und quadratischen Funktionen

E.2 Einführung des Ableitungsbegriffs

- Bedeutung der Ableitung als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung:

  Bestimmen von Änderungsraten zu gegebenen Beständen in unterschiedlichen Sachzusammenhängen, Erarbeiten des Zusammenhangs zwischen Sekanten- und Tangentensteigung sowie zwischen durchschnittlicher und lokaler Änderungsrate

– Ableitung einer Funktion an einer Stelle:

  Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs (Aufbau adäquater Vorstellungen z. B. durch Untersuchen von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen; eine formale Beschreibung von Grenzwerten mit Quantoren ist nicht erforderlich)

– Zusammenhang von Ableitungs- und Funktionsgraphen:

  Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion, grafisches Ableiten, wechselseitiges begründetes Zuordnen und Darstellen von Ableitungsgraphen und Funktionsgraphen, Begriff der Stammfunktion

– Ableitungsregeln:

  Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (exemplarischer Beweis für betragsmäßig kleines n), Beweisen und Anwenden der Faktor- und Summenregel, Ableiten ganzrationaler Funktionen

E.3 Anwendungen des Ableitungsbegriffs

– Funktionsuntersuchung bei ganzrationalen Funktionen:

  Monotonie- und Krümmungsverhalten, Entwickeln und anschauliches Begründen notwendiger und hinreichender Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen mittels Ableitungskalkül, Funktionsuntersuchung (Lösen von Polynomgleichungen durch Ausklammern und Substitution sowie unter Einsatz digitaler Werkzeuge; Polynomdivision nicht erforderlich)

– Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen anhand ihrer Eigenschaften:

  Modellieren von Sachzusammenhängen unter Verwendung von Begriffen wie u. a. Extrem- und Wendestelle, Bestimmen geeigneter Funktionsgleichungen

– Extremalprobleme:

  Lösen innermathematischer und realitätsbezogener Extremalprobleme, Reflektieren der verwendeten heuristischen Prinzipien

E.4 Exponentialfunktionen

– Wachstums- und Zerfallsprozesse:

  Untersuchen charakteristischer Eigenschaften exponentieller Prozesse sowie der Bedeutung der Parameter in Funktionsgleichungen der Form $f(x) = a \cdot b^x + c$, Halbwerts- und Verdopplungszeit, Modellieren von Realsituationen anhand gegebenen Datenmaterials, Vergleichen mit linearen und quadratischen Funktionen

– die (natürliche) Exponentialfunktion $f(x) = e^x$:

  anschauliches Herleiten der eulerschen Zahl e und der Ableitung von e^x, Transformation der Basis einer Exponentialfunktion auf die Standardbasis e

– Exponentialgleichungen:

  Algebraisches Lösen (Umkehrung des Potenzierens, Logarithmengesetze nicht erforderlich), Lösen durch Einsatz digitaler Werkzeuge

E.5 Trigonometrische Funktionen

- periodische Prozesse:

  Bogenmaß, sin und cos als Funktionen, Untersuchen der Bedeutung der Parameter in Funktionsgleichungen der Form $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x - c)] + d$ (auch mithilfe digitaler Werkzeuge; das Lösen trigonometrischer Gleichungen durch Termumformungen ist nicht erforderlich), Modellieren von Realsituationen anhand gegebenen Datenmaterials, Vergleichen mit ganzrationalen Funktionen
- Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion:

  Begründen der Ableitungsfunktionen durch grafisches Differenzieren

E.6 Weitere Ableitungsregeln[5]

- Produkt- und Kettenregel:

  Multiplikation und Verkettung zweier Funktionen der bekannten Funktionsklassen (ganzrationale, Exponential-, sin- und cos-Funktionen), Überprüfen der Produkt- und Kettenregel an konkreten Beispielen, Anwenden der Produkt- und Kettenregel

E.7 Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungen

- Polynomdivision:

  Faktorisieren von Polynomtermen zur Nullstellenbestimmung
- numerische Lösungsverfahren:

  Bisektionsverfahren, Newton-Verfahren, Regula-falsi, Konvergenzgeschwindigkeit, Reflektieren der Grenzen der Verfahren

E.8 Folgen und Reihen

- Folgen:

  Untersuchen von arithmetischen und geometrischen Folgen sowie Nullfolgen, Begründen der Konvergenz bzw. Divergenz und Ermittlung des Grenzwertes einer Folge mithilfe der Grenzwertsätze
- Reihen:

  Untersuchen von arithmetischen und geometrischen Reihen sowie deren Grenzwerten

[5] Inhalte dieses Themenfeldes können nach Fachkonferenzbeschluss in das Kurshalbjahr Q1 verschoben werden.

Q1 Analysis II

Zahlreiche Phänomene im Alltag und in den Wissenschaften erfordern die Rekonstruktion eines Bestands anhand einer vorgegebenen Änderungsrate. Dieses Problem eignet sich besonders, um den Zugang zum Integralkalkül zu motivieren. Auf diesem Weg kann, beispielsweise beim Übergang von Produktsummen zum bestimmten Integral oder bei der Begründung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung, in besonderer Weise neben der Problemlöse- auch die Argumentationskompetenz der Lernenden ausgeschärft werden. Die Einführung des bestimmten Integrals stellt dabei eine schlüssige Weiterführung des Konzeptes der Ableitung aus der Einführungsphase dar, denn einerseits erwächst der neue Begriff aus der Umkehrung der typischen Problemstellung beim Differenzieren, andererseits ähnelt die Vorgehensweise seiner Herleitung mittels Approximation und Grenzwertbetrachtung der Einführung des Ableitungsbegriffs. Im Sinne eines Spiralcurriculums gewinnen die Lernenden auf Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte ein tragfähiges Verfahren zur Rekonstruktion von Beständen wie Wasserständen oder zurückgelegten Streckenlängen aus gegebenen Änderungsraten. Durch den Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge können Bestände auch näherungsweise mit numerischen Verfahren rekonstruiert werden, was gleichzeitig den Umgang mit technischen Elementen der Mathematik fördert.

Alternativ kann bei der Gewinnung des Integralbegriffs zunächst auch die geometrische Fragestellung nach dem Inhalt einer Fläche, die von einem Graphen begrenzt ist, im Vordergrund stehen. Unabhängig von der Wahl des Zugangs werden in jedem Fall die Zusammenhänge zwischen dem Produkt zweier Größen und dem Rechtecksflächeninhalt, Produktsummen und Summen von Rechtecksflächeninhalten sowie schließlich zwischen dem Integral und dem Inhalt der Fläche unter einem Graphen herausgearbeitet. Im Leistungskurs beschäftigen sich die Lernenden darüber hinaus auch mit Volumenintegralen. Anhand von Rotationskörpern lernen sie diese exemplarisch kennen und entwickeln durch Approximation realer Körper ihre Modellierungskompetenzen weiter.

Neben der Integralrechnung bildet die Weiterentwicklung der Differenzialrechnung den zweiten inhaltlichen Schwerpunkt dieses Kurshalbjahres. Die Inhalte der Einführungsphase sind daher grundlegend für die Qualifikationsphase und werden hier vorausgesetzt. Aufbauend auf den in der Einführungsphase erworbenen Kenntnissen und Fähigkeiten untersuchen die Lernenden nun komplexere Funktionen, insbesondere unter Einbeziehung von Exponentialfunktionen mit entsprechenden Anwendungsbezügen. Durch den problemangemessenen Einsatz digitaler Werkzeuge kann zudem das Kalkültraining auf das Notwendige beschränkt werden. Im Leistungskurs wird die in der Einführungsphase begonnene Betrachtung von Wachstums- und Zerfallsprozessen fortgeführt, indem nun auf Grundlage realer Daten auch begrenzte und logistische Wachstumsprozesse mathematisiert werden. Wie auch anderen Inhalten dieses Kurshalbjahres kommt diesen Prozessen eine fächerverbindende Bedeutung im naturwissenschaftlich-technischen Kontext zu.

Durch die Auseinandersetzung mit den verschiedenartigen Problemstellungen in diesem Kurshalbjahr entwickeln die Lernenden ihre Argumentationskompetenz weiter, wobei insbesondere im Leistungskurs exemplarische Beweise nicht fehlen dürfen. Als Vertiefung bzw. Erweiterung sind die Untersuchung von Funktionenscharen, die Erarbeitung unterschiedlicher Möglichkeiten zur Approximation von Funktionen oder weitere Anwendungen der Integralrechnung vorgesehen.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

Themenfelder

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–6, durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (z. B. im Grundkurs 5 Wochen für Themenfeld 1, 2 Wochen für Themenfeld 2, 3 Wochen für Themenfeld 3 und 2 Wochen für das per Erlass festgelegte wechselnd verbindliche Themenfeld). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird i. d. R. ein zeitlicher Gesamtumfang von ca. 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

Q1.1 Einführung in die Integralrechnung

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Bedeutung des Integrals als Bestandsgröße und als orientierter Flächeninhalt:

  Rekonstruktion des Bestands anhand der Änderungsrate und des Anfangsbestands in Sachzusammenhängen, Veranschaulichen des Bestands als Inhalt der Fläche unter einem Funktionsgraphen, Entwickeln der Grundvorstellung des Integralbegriffs als verallgemeinerte Produktsumme
- Flächen unter einem Funktionsgraphen:

  Approximieren von Flächeninhalten durch Rechtecksummen, Übergang zum bestimmten Integral durch Grenzwertbildung auf Basis des propädeutischen Grenzwertbegriffs
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

  geometrisch-anschauliches Begründen des Hauptsatzes als Beziehung zwischen Differenzieren und Integrieren, Stammfunktionen, grafischer Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktion
- Entwickeln der Integrationsregeln mithilfe der Ableitungsregeln:

  Stammfunktion von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, Faktor- und Summenregel, Integrieren ganzrationaler Funktionen, Integrieren von e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$

Q1.2 Anwendungen der Integralrechnung

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Flächeninhaltsberechnung:

  Berechnen der Inhalte von Flächen, die von einem oder mehreren Funktionsgraphen und/oder Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzt sind (auch in Sachzusammenhängen)

- bestimmte Integrale als rekonstruierter Bestand:

  Anwenden des Integrals für Berechnungen in Sachzusammenhängen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Rotationskörper:

  Begründen der Volumenformel mithilfe der Grundvorstellung des Integralbegriffs, Berechnen der Volumina von Körpern, die durch Rotation von Flächen um die Abszissenachse entstehen (auch Wurzelfunktionen als Randfunktionen), Modellieren realer Gegenstände zur Volumenbestimmung
- uneigentliche Integrale:

  Untersuchen unendlich ausgedehnter Flächen

Q1.3 Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- verständiges Umgehen mit den in der Einführungsphase erarbeiteten Inhalten:

  Funktionen und ihre Darstellung, Ableitungsbegriff und Anwendungen, ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, Ableitungsregeln
- Untersuchen und Integrieren von e-Funktionen, die mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung), auch in Realsituationen (nur lineare Substitution, Nachweis der Stammfunktion durch Ableiten, Ermitteln der Stammfunktion durch Formansatz mit Koeffizientenvergleich)

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Wachstums- und Zerfallsprozesse:

  Modellieren begrenzter und logistischer Wachstumsprozesse unter Einbeziehung experimenteller Daten (Herleitungen aus Differenzialgleichungen sind nicht erforderlich)
- die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$:

  Beschreiben und Darstellen der natürlichen Logarithmusfunktion und ihrer Eigenschaften als Beispiel einer Umkehrfunktion, die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion von $1/x$
- Approximation von Funktionen:

  lokale Linearisierung mithilfe der Ableitung

Q1.4 Funktionenscharen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- ganzrationale Funktionenscharen:

  Untersuchen und Integrieren von Funktionenscharen, Bedeutung des Parameters für den Graphen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- weitere Funktionenscharen und Ortskurven:

Untersuchen und Integrieren von Funktionenscharen, bei denen e-Funktionen mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung), Bestimmen der Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten

Q1.5 Approximation

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Approximation funktionaler Zusammenhänge:

  Interpolation durch ganzrationale Funktionen, lineare Regression, Methode der kleinsten Quadrate

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Vertiefung der Approximation:

  Vergleichen verschiedener Ausgleichskurven als mathematische Modelle für gegebene Daten, quadratische und exponentielle Regression, Beurteilen der Passgenauigkeit

Q1.6 Weitere Anwendungen der Integralrechnung

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Rotationskörper (vgl. Themenfeld 2):

  Begründen der Volumenformel mithilfe der Grundvorstellung des Integralbegriffs, Berechnen der Volumina von Körpern, die durch Rotation von Flächen um die Abszissenachse entstehen (auch Wurzelfunktionen als Randfunktionen), Modellieren realer Gegenstände zur Volumenbestimmung

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Bogenlängenberechnung:

  Berechnen der Bogenlänge einer Kurve
- näherungsweises Berechnen von Integralen, Beurteilen der Genauigkeit:

  (Sehnen-)Trapezregel, Keplersche Fassregel

Q2 Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Sowohl die Analytische Geometrie als auch die Lineare Algebra bewegen sich im Spannungsfeld von Strukturorientierung und Anwendungsorientierung. Den Lernenden kann dieses Spannungsfeld unmittelbar einsichtig werden, indem der Blick auf die zugrunde liegenden mathematischen Strukturen mit dem Blick auf die Anwendung dieser Strukturen in Sachzusammenhängen verknüpft wird.

Das Thema Analytische Geometrie bietet durch die Betrachtung geometrischer Objekte im dreidimensionalen Raum die Möglichkeit, in besonderer Weise das räumliche Anschauungsvermögen weiterzuentwickeln und den Umgang mit mathematischen Darstellungen zu fördern. Gleichzeitig eröffnen sich dabei vielfältige Anlässe zur Förderung des Argumentierens und Kommunizierens, indem die Lernenden Eigenschaften und Lagebeziehungen der geometrischen Objekte entdecken und beschreiben.

Zur Orientierung im Raum werden zunächst dreidimensionale Koordinatensysteme eingeführt, mit denen die Lernenden geometrische Objekte darstellen können. Das Konzept des Vektors stellt eine neue mathematische Struktur dar, die es ihnen u. a. erlaubt, Verschiebungen dieser Objekte im Raum zu beschreiben. Darauf aufbauend ermöglichen die Definition des Skalarprodukts und die Einführung des Winkelbegriffs weitergehende Untersuchungen geometrischer Objekte im Raum.

Um die Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen im Raum weiter untersuchen zu können, benötigen die Lernenden ein tragfähiges Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Sie lernen, wie Gleichungssysteme mit algorithmischen Verfahren gelöst werden und wenden die Matrixschreibweise zur effektiven Darstellung an. Anwendungsbeispiele, insbesondere aus dem naturwissenschaftlich-technischen Bereich, wie z. B. Mischungsverhältnisse oder Netzwerksströme, können sowohl dazu genutzt werden, lineare Gleichungssysteme einzuführen, als auch dazu, die Nützlichkeit der entwickelten Lösungsverfahren aufzuzeigen.

Im Leistungskurs begegnen die Lernenden mit der Einführung der Koordinaten- und Normalenform einer Ebene alternativen Darstellungsformen, mit denen sie geometrische Problemstellungen lösen können. Dies eröffnet ihnen den Zugang zu komplexeren geometrischen und anwendungsbezogenen Fragestellungen. In der Auseinandersetzung mit diesen entwickeln sie insbesondere ihre Problemlöse- und Argumentationskompetenzen. Im Grundkurs ist die Einführung der Koordinatenform als Vertiefung bzw. Erweiterung vorgesehen.

Matrizen haben inzwischen eine große Bedeutung in vielen Bereichen der Wissenschaft, etwa zur Beschreibung wirtschaftlicher Zusammenhänge, zur Modellierung von Übergangsprozessen oder der Berechnung von Computergrafiken. Deshalb erweitert die Einführung von Matrizen und Matrizenkalkül nicht nur das Vektorkonzept als Beitrag zur Strukturorientierung, sondern eröffnet vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in verschiedenen Bereichen. Innerhalb des Themenfelds „Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen“ können insbesondere die Modellierungskompetenzen der Lernenden gefördert werden, da zur Beschreibung von Realsituationen in der Regel starke Annahmen getroffen werden, die den Modellcharakter der Beschreibung hervorheben. Demgegenüber stellt das Themenfeld „Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen“ eine deutliche Erweiterung der Analytischen Geometrie dar. Die Lernenden entwickeln eine stärker dynamische Raumvorstellung, indem sie die bisher statischen Objekte als beweglich erleben, und vertiefen dabei gleichzeitig ihre Kompetenz, geometrische Darstellungen zu verwenden.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)** und **Raum und Form (L3)**.

Themenfelder

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–5 bzw. 4–6 (für Grundkurse), durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (z. B. im Grundkurs 3 Wochen für Themenfeld 1, 3 Wochen für Themenfeld 2, 3-4 Wochen für Themenfeld 3 und 2-3 Wochen für das per Erlass festgelegte wechselnd verbindliche Themenfeld). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird i. d. R. ein zeitlicher Gesamtumfang von ca. 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

Q2.1 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– Einführung und Lösungsverfahren:

  Beispiele für LGS (auch über- und unterbestimmte), Darstellen von LGS mithilfe von Koeffizientenmatrizen, systematisches Lösen von LGS mithilfe eines algorithmischen Verfahrens, Lösen mithilfe eines digitalen Werkzeugs, Auswahl eines geeigneten Lösungswegs für ein gegebenes LGS

– Anwenden von LGS:

  exemplarisches Behandeln außermathematischer Fragestellungen, die auf LGS führen

– geometrische Interpretation der Lösungsmengen von LGS (in Verbindung mit Themenfeld 3)

Q2.2 Orientieren und Bewegen im Raum

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– räumliche Koordinatensysteme:

  Darstellen räumlicher Objekte im dreidimensionalen Koordinatensystem (insbesondere Zeichnen von Schrägbildern und Beschreiben von Punkten mithilfe von Koordinaten), auch mithilfe von Geometriesoftware

– Vektoren:

  Beschreiben von Verschiebungen im Raum mithilfe von Vektoren, Ortsvektor eines Punktes, Rechnen mit Vektoren (Addition und Vervielfachung von Vektoren), Kollinearität zweier Vektoren, Betrag eines Vektors, Abstand zweier Punkte im Raum

– Winkel:

  Definition des Skalarprodukts, Untersuchen der Orthogonalität von Vektoren, Bestimmen des Winkels zwischen zwei Vektoren

– einfache geometrische Figuren und Körper im Raum:

Untersuchen einfacher geometrischer Figuren und Körper (Seitenlängen, Parallelität, Orthogonalität, Winkelgrößen), Begründen der Eigenschaften

Q2.3 Geraden und Ebenen im Raum

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Parameterdarstellungen:

  Darstellen von Geraden und Ebenen im Raum mit Parametergleichungen, Punktprobe
- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen:

  Untersuchen der Lagebeziehung zweier Geraden, Berechnen des Schnittpunktes und des Schnittwinkels zweier Geraden, Untersuchen der Lagebeziehung von Gerade und Ebene mithilfe von Parametergleichungen, Bestimmen von Durchstoßpunkten
- komplexere Problemstellungen:

  Untersuchen geometrischer Objekte im Raum (z. B. Pyramide), Beschreiben und Untersuchen geradliniger Bewegungen, Untersuchen von Schattenwürfen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- weitere Darstellungsformen einer Ebene:

  Koordinatengleichung der Ebene, Normalenvektor und Normalenform einer Ebene, Umwandeln der bekannten Darstellungsformen ineinander, Untersuchen der Lagebeziehung von Gerade und Ebene sowie Bestimmen von Durchstoßpunkten mithilfe der Koordinatengleichung
- weitere Lagebeziehungen und Abstandsbestimmungen:

  Lagebeziehung zweier Ebenen, Bestimmen von Schnittgeraden, Erarbeiten und Anwenden von Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
- Vektorprodukt:

  Berechnen von Normalenvektoren

Q2.4 Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Beschreiben von Übergangsprozessen und deren Zustandsdiagrammen mithilfe von Matrizen (z. B. Populationsentwicklung, Wählerverhalten, Kundenströme)
- Rechnen mit Matrizen:

  skalare Multiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrizenmultiplikation, Bestimmen inverser Matrizen mithilfe eines digitalen Werkzeugs
- Markov-Ketten:

  Modellieren von Übergangsprozessen mit Matrizen, schrittweises Berechnen von Zuständen, Bestimmen stabiler Zustände mithilfe von Fixvektoren

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- langfristige Entwicklung von Übergangsprozessen:

  Nutzen von Potenzen von Matrizen, Grenzprozesse und Interpretieren von Grenzmatrizen

Q2.5 Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Beschreiben von geometrischen Abbildungen mithilfe von Matrizen (z. B. Schattenwürfe oder andere Projektionen)
- Rechnen mit Matrizen:

  skalare Multiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrizenmultiplikation, Bestimmen inverser Matrizen mithilfe eines digitalen Werkzeugs
- Darstellen linearer Abbildungen mit Matrizen im $\mathbb{R}^3$:

  Bestimmen von Bildpunkten bei beliebigen Abbildungsmatrizen, Untersuchen und Bestimmen von Abbildungsmatrizen bei folgenden Abbildungen: orthogonale Spiegelungen an den Koordinatenebenen, Parallelprojektionen auf die Koordinatenebenen, zentrische Streckungen am Koordinatenursprung, Verknüpfungen dieser Abbildungen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Darstellen linearer Abbildungen mit Matrizen im $\mathbb{R}^3$:

  Untersuchen und Bestimmen von Abbildungsmatrizen bei folgenden Abbildungen: Drehungen um die Koordinatenachsen, Parallelprojektionen auf beliebige Ursprungsebenen, Bestimmen von Fixpunkten

Q2.6 Vertiefung der Analytischen Geometrie (nur Grundkurs)

- Koordinatengleichung einer Ebene:

  Koordinatengleichung der Ebene, Umwandeln der verschiedenen Darstellungsformen ineinander, Untersuchen der Lagebeziehung von Gerade und Ebene und Bestimmen von Durchstoßpunkten mithilfe der Koordinatengleichung
- Abstandsbestimmung:

  Erarbeiten und Anwenden von Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung von Punkt und Ebene

Q3 Stochastik

Das Thema Stochastik eröffnet durch seinen unmittelbaren Lebensweltbezug vielfältige Möglichkeiten, Realsituationen im Mathematikunterricht zu thematisieren. Dies gilt gleichermaßen für die Wahrscheinlichkeitstheorie und für die Statistik, wie sich an Sachzusammenhängen wie Medikamentenwirksamkeit, Meinungsumfragen, Glücksspiele u. a. m. zeigen lässt. Der statistische Aspekt des Themas bereitet die Lernenden auf statistische Verfahren vor, die heutzutage in vielen wissenschaftlichen Bereichen Anwendung finden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung widmet sich der mathematischen Beschreibung von Vorgängen, deren Ausgang vom Zufall bestimmt ist. Aufbauend auf den Betrachtungen im Unterricht der Sekundarstufe I wird das grundlegende Verständnis von Zufallsprozessen, wie sie in typischen Alltagssituationen vorkommen, vertieft. Dabei können die Lernenden insbesondere im Umgang mit mathematischen Darstellungen, wie z. B. Baumdiagrammen, sowie im mathematischen Kommunizieren, wie z. B. bei bedingten Wahrscheinlichkeiten, gefördert werden.

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der sich vielfältige reale Zufallsvorgänge beschreiben lassen. Durch die Betrachtung von Bernoulli-Ketten und ihren Kenngrößen können insbesondere die Modellierungskompetenzen der Lernenden vertieft werden, wobei auch Modellierungsgrenzen zu thematisieren sind. Zum Verständnis der Berechnungen im Zusammenhang mit der Binomialverteilung werden anhand einfacher Problemstellungen auch Zählverfahren erarbeitet, wodurch die Lernenden zugleich ihre Problemlösekompetenzen weiterentwickeln. Bei der konkreten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit binomialverteilten Zufallsgrößen kann die Verwendung digitaler Werkzeuge die Arbeit mit Tabellen weitgehend ersetzen.

Im Leistungskurs begegnet den Lernenden mit der Normalverteilung auch eine bedeutende nicht-diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Der Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung kann dabei auf anschauliche Weise, z. B. über Histogramme, hergestellt werden. Normalverteilte Zufallsgrößen werden in verschiedenen Sachzusammenhängen untersucht und gegenüber diskret verteilten Zufallsgrößen abgegrenzt.

Die Auseinandersetzung mit den Themenfeldern 4 und 5 aus dem Bereich der beurteilenden Statistik ermöglicht es, ein vertieftes Verständnis für Statistik in Realsituationen zu gewinnen. Die zentrale Idee, von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen, wird dabei den Lernenden entweder im Kontext der Hypothesentests oder im Zusammenhang mit Konfidenzintervallen einsichtig. In beiden Themenfeldern bietet es sich an, einen Fokus auf das mathematische Argumentieren zu legen.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Daten und Zufall (L5)**, **Messen (L2)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

Themenfelder

verbindlich: Themenfelder 1–3 sowie ein weiteres aus den Themenfeldern 4–5, durch Erlass festgelegt; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (z. B. im Grundkurs 3 Wochen für Themenfeld 1, 3 Wochen für Themenfeld 2, 3-4 Wochen für Themenfeld 3 und 2-3 Wochen für das per Erlass festgelegte wechselnd verbindliche Themenfeld). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird i. d. R. ein zeitlicher Gesamtumfang von ca. 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

Q3.1 Grundlegende Begriffe der Stochastik

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie:

  Beschreiben von Zufallsexperimenten (Laplace-Experimente) unter Verwendung der Begriffe Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis und Wahrscheinlichkeit
- statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:

  absolute und relative Häufigkeit (auch konkrete Ermittlung für selbst durchgeführte Zufallsexperimente), grafische Darstellung, Simulationen von Zufallsexperimenten mit einer geeigneten Software (z. B. Tabellenkalkulation), Empirisches Gesetz der großen Zahlen, Vergleich von statistischem und laplaceschem Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Umgang mit Daten:

  exemplarisches Planen statistischer Erhebungen, Beurteilen mithilfe von arithmetischem Mittelwert, empirischer Varianz und Standardabweichung
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten:

  Baumdiagramm, Pfadregeln

Q3.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- bedingte Wahrscheinlichkeiten:

  Identifizieren und Beschreiben bedingter Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen, Darstellen und Berechnen mittels Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln, Überprüfen von Ereignissen auf (Un-)Abhängigkeit
- Bestimmen von Laplace-Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Zählverfahren:

  Lösen einfacher kombinatorischer Zählprobleme (geordnete Stichproben mit / ohne Zurücklegen, ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen), Binomialkoeffizient

Q3.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Erarbeiten grundlegender Begriffe:

  Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Darstellung durch Histogramme, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Untersuchen einfacher Glücksspiele
- Bernoulli-Ketten:

  Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Angeben der Kenngrößen von Bernoulli-Ketten, Entwickeln und Begründen der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ anhand eines geeigneten Beispiels, Berechnen von Trefferwahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen, Modellierungsgrenzen
- binomialverteilte Zufallsgrößen:

  Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Analysieren von Histogrammen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, kumulierte Binomialverteilung (Berechnen auch mit digitalen Werkzeugen)

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- normalverteilte Zufallsgrößen:

  Dichtefunktion der Normalverteilung, Abgrenzen gegenüber diskreten Zufallsgrößen, Zuordnen der Glockenform als Eigenschaft der Graphen, Erwartungswert und Standardabweichung, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen in verschiedenen Sachzusammenhängen (z. B. Körpergröße und -gewicht, Füllmengen) mittels digitaler Werkzeuge
- Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung:

  Idee der Annäherung der Histogramme binomialverteilter Zufallsgrößen an Glockenkurven bei großer Standardabweichung

Q3.4 Hypothesentests (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Erarbeiten grundlegender Begriffe:

  Hypothesen, Alternativtest, einseitiger Hypothesentest, Verwerfungsbereich, Entscheidungsregel, Fehler erster / zweiter Art
- Berechnen von Irrtumswahrscheinlichkeiten (auch mittels digitaler Werkzeuge)
- Entwickeln einseitiger Hypothesentests:

  Festlegen der Hypothesen, Ermitteln von Entscheidungsregeln zu vorgegebenen Signifikanzniveaus (maximal zulässige Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art)

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Entwickeln zweiseitiger Hypothesentests

Q3.5 Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Sigma-Regeln:

  Legitimieren der Sigma-Regeln (1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen) anhand konkreter Binomialverteilungen
- Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten (auf Grundlage der obigen Sigma-Regeln):

  Schließen von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe, Bestimmen von Prognoseintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen
- Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten (auf Grundlage der obigen Sigma-Regeln):

  Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Konfidenzniveau, Bestimmen von Konfidenzintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Stichprobenumfänge:

  Schätzen von Stichprobenumfängen anhand vorgegebener Konfidenzniveaus (auf Grundlage der obigen Sigma-Regeln)

Q4 Themenfelder mit prozess- bzw. inhaltsbezogenem Schwerpunkt

Für die Lernenden bietet das Kurshalbjahr die Möglichkeit, sich sowohl mit neuen Inhalten auseinanderzusetzen als auch in wiederholenden und vernetzenden Bezügen Themenfelder aus den Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik zu bearbeiten. Je nach Voraussetzungen der Lerngruppe können zudem bestimmte allgemeine mathematische Kompetenzen schwerpunktmäßig gefördert werden. Ausgewiesen werden daher sowohl Themenfelder mit prozessbezogenem als auch solche mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt. Aus jedem der beiden Bereiche ist je ein Themenfeld – ausgewählt durch die Lehrkraft – verbindliche Grundlage des Unterrichts.

Strukturierung und didaktischer Fokus von Themenfeldern mit **prozessbezogenem** Schwerpunkt sind ausgerichtet auf einen der in Abschnitt 2.3 dargestellten Kompetenzbereiche. In der Auseinandersetzung mit passend von der Lehrkraft ausgewählten Inhalten können Lernende die entsprechenden Kompetenzen weiterentwickeln sowie reflektieren. In Kursen auf erhöhtem Niveau wird bei der Bearbeitung dieser Themenfelder ein erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad erwartet; es werden daher keine zusätzlichen Inhalte ausgewiesen.

Strukturierung und didaktischer Fokus von Themenfeldern mit **inhaltsbezogenem** Schwerpunkt sind ausgerichtet auf inhaltliche Aspekte. In der Auseinandersetzung mit den aufgeführten Inhalten können Lernende je nach Ausgestaltung des Themenfeldes im Unterricht Kompetenzen unterschiedlicher Kompetenzbereiche festigen und vertiefen.

Die Bearbeitung der beiden Themenfelder kann – wenn sinnvoll möglich – auch in wechselseitiger Verschränkung erfolgen. So können beispielsweise innerhalb des Themenfelds „Numerische Optimierung“ Modellierungsaspekte besonders herausgehoben werden.

Anstelle der hier aufgeführten Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt kann auch ein Themenfeld aus den Kurshalbjahren Q1 bis Q3 gewählt werden, das für den jeweiligen Abiturjahrgang nicht verbindlich festgelegt ist und in den vorangegangenen Kurshalbjahren noch nicht bearbeitet wurde.

Bezug zu den Leitideen:

Je nach Auswahl der Themenfelder können **alle Leitideen L1 bis L5** umgesetzt werden.

Themenfelder

verbindlich: eines der Themenfelder 1–3 sowie entweder eines der Themenfelder 4–9 oder eines der Themenfelder aus Q1–Q3, das für den jeweiligen Abiturjahrgang nicht verbindlich festgelegt ist und in den vorangegangenen Kurshalbjahren noch nicht bearbeitet wurde, jeweils ausgewählt durch die Lehrkraft

Themenfelder mit prozessbezogenem Schwerpunkt

Q4.1 Argumentieren und Beweisen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Formulieren eigenständiger Vermutungen zu gegebenen Fragestellungen
- Nachvollziehen, Erläutern und Entwickeln von Argumentationen und logischen Schlussfolgerungen, insbesondere zu Inhaltsbereichen der Sekundarstufe II
- Anwenden von Beweisverfahren (z. B. direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion)

Q4.2 Problemlösen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme
- Anwenden heuristischer Strategien (z. B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren) und Prinzipien (z. B. Extremalprinzip, Symmetrieprinzip) zur Lösung mathematischer Probleme
- Reflektieren der verwendeten Strategien und Prinzipien

Q4.3 Modellieren

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Strukturieren, Vereinfachen und Mathematisieren realer Problemstellungen, insbesondere mittels mathematischer Modelle aus der Sekundarstufe II
- Interpretieren und Überprüfen der mathematischen Ergebnisse
- Reflektieren der Schritte des Modellierungskreislaufs

Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt

Q4.4 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Beschreiben und Entwickeln von Modellen für Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Differenzialgleichungen
- Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen erster Ordnung:

Erarbeiten von Richtungsfeldern (z. B. durch Einsatz digitaler Werkzeuge), Separation der Variablen und andere elementare Lösungsmethoden zur Gewinnung allgemeiner und spezieller Lösungen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Untersuchen von Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (z. B. bei periodischen Prozessen)

Q4.5 Numerische Optimierung

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– Lösen realitätsnaher Extremwertprobleme:

Gewinnen von Zielfunktionen, numerische Extremwertbestimmung (z. B. mit Bisektionsverfahren oder Newtonverfahren) auch unter Einsatz digitaler Werkzeuge, Aufbau eines Algorithmenverständnisses

– Reflektieren der Grenzen der Modellierung und der Grenzen numerischer Verfahren im Hinblick auf Laufzeit und Genauigkeit

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Anwenden der numerischen Optimierung in mehreren Variablen, Höhenliniendiagramme

Q4.6 Kreis und Kugel

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– Kreise:

Darstellen von Kreisen mit Vektor- und Koordinatengleichungen, Punktprobe, Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen zwei Kreisen sowie zwischen Kreis und Gerade, Bestimmen der Schnittmengen

– Kugeln:

Darstellen von Kugeln mit Vektor- und Koordinatengleichungen, Punktprobe, Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Geraden sowie zwischen zwei Kugeln, Bestimmen der Schnittmengen zwischen Kugeln und Geraden

– Beschreiben realer Objekte mittels Kugeln und Kreisen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Ebenen, Bestimmen der Schnittmengen zwischen Kugeln und Ebenen sowie zwischen zwei Kugeln

Q4.7 Weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– hypergeometrische Verteilung:

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen (z. B. Lotto, Keno), Vergleichen mit der Binomialverteilung

– Poisson-Verteilung:

Näherung der Binomialverteilung für seltene Ereignisse, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Poisson-Verteilung als Näherung der Binomialverteilung für große n; Beweisen des Grenzübergangs für $n \to \infty$

Q4.8 Komplexe Zahlen

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– algebraische Form:
  Real- und Imaginärteil, Rechnen mit komplexen Zahlen
– Polarform:
  Darstellen in der Gaußschen Zahlenebene, $z = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$, Deuten der Grundrechenarten in der Gaußschen Zahlenebene
– Lösen von Gleichungen in $\mathbb{C}$

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Darstellen der komplexen Zahlen mit 2x2-Matrizen

Q4.9 Graphentheorie

grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

– grundlegende Begriffe und Eigenschaften:
  Beschreiben von Realsituationen mithilfe von Graphen, grundlegende Begriffe wie z. B. Knoten und Kanten, Begründen des Handschlaglemmas und der Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad, Darstellen von Graphen mithilfe von Matrizen, Untersuchen der Isomorphie von Graphen, Eulerwege
– das Kürzeste-Wege-Problem:
  Modellieren von Wegeproblemen anhand von Alltagsbeispielen, Verwenden von Kantengewichten, Entwickeln eigener algorithmischer Lösungsansätze und -wege, Beschreiben und Anwenden von Breitensuche und Dijkstra-Algorithmus anhand einfacher Beispiele

erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

– Begründen der Korrektheit der verwendeten Algorithmen