

Mathematik Q3 Abels





Kopfübung

I Zufallsgrößen

- Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Erwartungswert einer Zufallsgröße
- Standardabweichung und Varianz einer Zufallsgröße

II Binomialverteilung

- Bernoulli
- Binomialverteilung – Eigenschaften I + II, $B(n; p; k)$ und $F(n; p; k)$



Gemischte **Übungen**

Cheatsheet

Zufallsgröße Zufallsvariable

Eine Größe X , welche jedem Ergebnis e_i eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl x_i zuordnet, wird als **Zufallsgröße** oder als **Zufallsvariable** bezeichnet.

Ereignis $X = x_i$

Mit $X = x_i$ wird das Ereignis bezeichnet, das aus allen Ergebnissen des Zufallsversuchs besteht, deren Eintritt dazu führt, dass die Zufallsgröße X den Wert x_i annimmt.

Wahrscheinlichkeits- verteilung der Zufallsgröße X

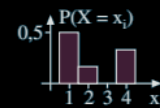
Ordnet man jedem Wert x_i , den die Zufallsgröße X annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zu, mit der sie diesen Wert annimmt, so erhält man die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße X .

Verteilungstabelle Verteilungsdiagramm

Man kann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung als **Tabelle** oder als **Diagramm** darstellen.
Beispiel zur tabellarischen Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Beispiel zur graphischen Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung



Erwartungswert der Zufallsgröße X

X sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $x_1, x_2, \dots, x_m$. Dann versteht man unter dem **Erwartungswert** von X die Größe $\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_m \cdot P(X = x_m)$.

Streuungsmaße: Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X

X sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $x_1, x_2, \dots, x_m$, die den Erwartungswert $\mu = E(X)$ besitzt. Dann versteht man unter der **Varianz** von X die Größe $V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_m - \mu)^2 \cdot P(X = x_m)$.

Als **Standardabweichung** von X bezeichnet man die Größe $\sigma(X) = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_m - \mu)^2 \cdot P(X = x_m)}$. Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz: $\sigma = \sqrt{V}$

Fakultät

Der Produktterm $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ wird als **n-Fakultät** bezeichnet. Die symbolische Kurzschreibweise lautet $n!$.
Sonderfälle: $0! = 1, 1! = 1$

Binomialkoeffizient

Der Quotiententerm $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ($n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$) wird als **Binomialkoeffizient** bezeichnet (gelesen: n über k).
Sonderfälle: $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n$

Bernoulli-Versuch Bernoulli-Experiment

Ein **Bernoulli-Versuch** (Bernoulli-Experiment) ist ein Zufallsversuch mit genau zwei Ausgängen E und $\bar{E}$.
 E wird als Erfolg oder Treffer bezeichnet, $\bar{E}$ als Misserfolg oder Niete.

Bernoulli-Kette der Länge n

Als **Bernoulli-Kette** der Länge n bezeichnet man die n -fache Wiederholung eines Bernoulli-Versuchs.

Formel von Bernoulli

Die **Formel von Bernoulli** dient zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erzielen. Sie lautet:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Binomialverteilung $P(X = k) = B(n; p; k)$ Tabelle S. 230 f.

Als **Binomialverteilung** $P(X = k) = B(n; p; k)$ bezeichnet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X , welche die Trefferzahl k in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p darstellt.

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Kumulierte Binomialverteilung $P(X \leq k) = F(n; p; k)$ Tabelle S. 232 ff.

Als **kumulierte Binomialverteilung** $P(X \leq k) = F(n; p; k)$ bezeichnet man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Trefferzahlen von 0 bis k in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p .

$$P(X \leq k) = F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k)$$

Berechnung von Bernoulli-Wahr- scheinlichkeiten

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X \leq k) = F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k)$$

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) = 1 - F(n; p; k - 1)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1) = F(n; p; b) - F(n; p; a - 1)$$

Erwartungswert, Varianz, Standard- abweichung binomial- verteilter Zufalls- größen

Für den **Erwartungswert** μ , die **Varianz** V und die **Standardabweichung** σ einer binomialverteilten Zufallsgröße X gelten folgende Formeln:

$$\text{Erwartungswert: } \mu = n \cdot p$$

$$\text{Varianz } V: V = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Sigma-Regeln

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ gelten folgende Regeln. Sie dürfen angewandt werden, wenn die **Laplace-Bedingung** $\sigma > 3$ erfüllt ist:

$$\mathbf{1\sigma\text{-Regel:}} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$\mathbf{2\sigma\text{-Regel:}} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$$

$$\mathbf{3\sigma\text{-Regel:}} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

Eigenschaften einer Binomialverteilung

Für $p = 0,5$ gilt die Symmetriebeziehung $B(n; 0,5; k) = B(n; 0,5; n - k)$. Die allgemeine Symmetriebeziehung für $0 < p < 1$ lautet:
 $B(n; p; k) = B(n; 1 - p; n - k)$.



Big114 – Test I

1. Urne

Aus der abgebildeten Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X ist die Augensumme der beiden Kugeln.

- Stellen Sie den Vorgang mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabellenform an und zeichnen Sie ein Histogramm.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X und tragen Sie diese in das Histogramm ein.



2. Spielstrategie

Aus der Urne von Aufgabe 1 werden mit einem Griff eine oder mehrere Kugeln gezogen, wobei nur die Farbe der Kugeln eine Rolle spielt. Für eine gelbe Kugel erhält der Spieler 2 €, für eine rote Kugel muss er 5 € zahlen. Vor Beginn der Ziehung muss der Spieler festlegen, wie viele Kugeln er ziehen möchte. X beschreibt den Gewinn/Verlust des Spielers pro Spiel.

- Stefan ist vorsichtig. Er will nur eine Kugel ziehen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gewinns X .
- Vera ist der Meinung, dass ihre Chancen besser sind, wenn sie drei Kugeln zieht. Berechnen Sie ebenfalls Erwartungswert und Standardabweichung des Gewinns X . Beurteilen Sie die Strategien von Stefan und Vera im Vergleich.

3. Würfelstrategie

Peter würfelt gegen die Bank. Bei einem beliebigen Einsatz bekommt er den 2-fachen Einsatz ausbezahlt, wenn die gewürfelte Zahl gerade ist, und er geht leer aus, wenn die gewürfelte Zahl ungerade ist. Peter möchte sein Glück erzwingen und spielt nach folgender Verdoppelungsstrategie:

Er setzt 1 € und will im Gewinnfall aufhören. Gewinnt er beim ersten Spiel noch nicht, so will er im zweiten Spiel den Einsatz auf 2 € verdoppeln, dann wieder im Gewinnfall aufhören und im Verlustfall bei erneut verdoppeltem Einsatz (4 €) abermals sein Glück versuchen. Da irgendwann eine gerade Zahl gewürfelt wird, glaubt Peter, so einen Gewinn erzwingen zu können.

- Peter hat 63 €. Wie oft kann er maximal spielen?
- Bestimmen Sie seinen Gewinn bzw. Verlust, wenn er im ersten, erst im zweiten, erst im dritten, ..., in keinem Spiel gewinnt.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert für Peters Gewinn/Verlust.

4. Münzspiel

Felix besitzt 4 €. Er nimmt an folgendem Spiel teil: Der Spieler wirft zweimal eine faire Münze. Jedesmal, wenn Kopf fällt, wird sein Guthaben halbiert. Fällt Zahl, wird sein Guthaben verdoppelt. X sei das Guthaben des Spielers am Ende des Spiels.

- Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X . Ist das Spiel fair?
- Das Spiel soll fair gemacht werden. Dazu wird, wenn Zahl fällt, das Guthaben nicht verdoppelt, sondern mit dem Faktor $a > 0$ vervielfacht. Wenn Kopf fällt, bleibt es bei der Halbierung des Guthabens. Wie muss a gewählt werden?

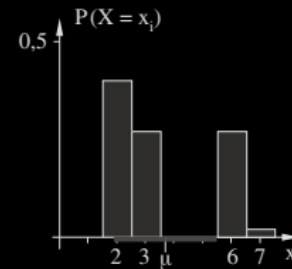


Big114 – Test I

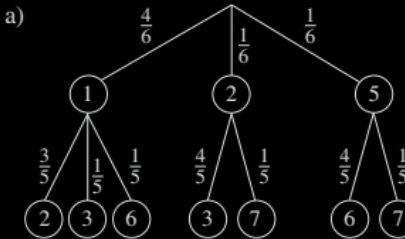


1. b)

x_i	2	3	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{12}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{2}{30}$



a)



c) $E(X) = \frac{11}{3} \approx 3,67$, $\sigma(X) \approx 1,85$

2. a) 1 Kugel:

x_i	-5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$E(X) = -\frac{1}{3}$, $\sigma(X) \approx 3,30$

b) 3 Kugeln:

x_i	-8	-1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X) = -1$, $\sigma(X) \approx 4,43$

Die Strategie von Vera ist schlechter als die Strategie von Stefan.

3. a) Da $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ ist, kann er maximal 6-mal spielen.

b) Wenn im n -ten Spiel gewonnen wird, ($n \leq 6$), so beträgt der Einsatz

$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{ €}$, so dass in jedem Fall 1 € Gewinn erzielt wird.

Wird bei keinem Spiel gewonnen, entstehen 63 € Verlust.

G: Gewinn/Verlust

g_i	-63	1
$P(G = g_i)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6$

c) $E(G) = (-63) \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{63}{64} = 0$

4. a) G: Guthaben/Verlust

$E(G) = \frac{1}{4} + 2 + 4 = \frac{25}{4}$, $\sigma(X) \approx 5,76$

g_i	1	4	16
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b) Das Spiel ist fair, wenn $E(G) = 4$ gilt.

$E(G) = \frac{1}{4} + a + a^2 = 4$. Wegen $a > 0$ muss $a = 1,5$ sein.

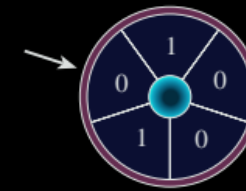
g_i	1	$2a$	$4a^2$
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Big152 – Test II

1. Glücksrad

Beim abgebildeten Glücksrad mit fünf gleich großen Sektoren wird nach dem Drehen im Stillstand durch einen Pfeil angezeigt, ob man einen Treffer (1) oder eine Niete (0) erzielt hat. Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:



A: genau fünf Treffer
C: mehr Treffer als Nieten

B: höchstens zwei Treffer
D: erster Treffer im zehnten Versuch

2. Führerscheintest

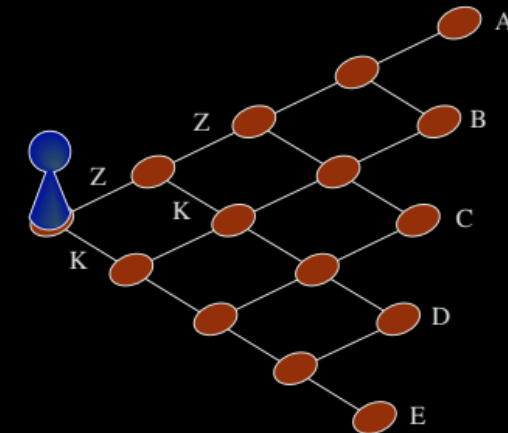
Ein Führerschein-Test besteht aus 6 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Eine Testperson beantwortet jede Frage auf gut Glück.

X sei die Zufallsgröße, die die Anzahl der richtig beantworteten Fragen beschreibt.

- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung tabellarisch und graphisch dar.
- Berechnen Sie den Erwartungswert, die Standardabweichung und die Varianz der Verteilung.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kandidat den Test besteht, wenn er auf gut Glück jeweils eine Antwort ankreuzt. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 4 Fragen richtig beantwortet sind.

3. Münzwurfspiel

Ein Spieler rückt auf dem abgebildeten Spielfeld vom Startpunkt ausgehend nach rechts vor, wenn er mit einer Münze Kopf wirft. Wirft er Zahl, rückt er nach links vor. Nach vier Münzwürfen kommt er in einer der Positionen A bis E an, womit das Spiel endet.



- Geben Sie alle Wurfserien an, die zu Position A bzw. zu Position C führen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Der Spieler erreicht A.“
 E_2 : „Der Spieler erreicht C.“
 E_3 : „Der Spieler erreicht C oder D.“
- Ein Spieler führt 10 Spiele durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er genau dreimal Position C?
- Untersuchen Sie, wie viele Spiele der Spieler mindestens machen muss, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal Position A erreicht werden soll.



Big152 – Test II



1. a) $n = 10; p = 0,4; k = 5; P(X = 5) = B(10; 0,4; 5) = 0,2007$

b) $n = 10; p = 0,4; k \leq 2; P(X \leq 2) \approx 0,1673$

c) Mehr Treffer als Nieten werden nur erzielt, wenn mindestens 6 Treffer erreicht werden:

$n = 10; p = 0,4; k = 6, 7, \dots, 10$

$$P(X \geq 6) = B(10; 0,4; 6) + \dots + B(10; 0,4; 10) \\ = 0,1115 + 0,0425 + 0,0106 + 0,0016 + 0,0001 = 0,1663$$

d) E_1 : „erster Treffer im 10. Versuch“, $P(E_1) = 0,6^9 \cdot 0,4 = 0,0040$

2. $n = 6; p = \frac{1}{3}$

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,0878	0,2634	0,3292	0,2195	0,0823	0,0165	0,0014

b) $E(X) = 2; V(X) = \frac{4}{3}; \sigma(X) = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,1001$

3. a) Wurfserie zu A: ZZZZ

Wurfserien zu C: ZZKK ZKZK ZKKZ KZZK KZKZ KKZZ

b) $P(E_1) = \frac{1}{16}; P(E_2) = \frac{6}{16}; P(E_3) = \frac{10}{16}$

c) $n = 10; k = 3; p = \frac{3}{8}; P(X = 3) = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^7 = \frac{253125000}{2^{30}} \approx 0,2357$

d) $P(\text{Spieler erreicht nie A bei } n \text{ Spielen}) = \left(\frac{15}{16}\right)^n$

$P(\text{Spieler erreicht mindestens einmal A bei } n \text{ Spielen}) = 1 - \left(\frac{15}{16}\right)^n$

$1 - \left(\frac{15}{16}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{15}{16}\right)^n \leq 0,1, n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{15}{16}} \approx 35,68$

Der Spieler muss mindestens 36-mal spielen.



Big114,152

1. Urne

Aus der abgebildeten Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X ist die Augensumme der beiden Kugeln.

- Stellen Sie den Vorgang mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabellenform an und zeichnen Sie ein Histogramm.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X und tragen Sie diese in das Histogramm ein.



2. Spielstrategie

Aus der Urne von Aufgabe 1 werden mit einem Griff eine oder mehrere Kugeln gezogen, wobei nur die Farbe der Kugeln eine Rolle spielt. Für eine gelbe Kugel erhält der Spieler 2 €, für eine rote Kugel muss er 5 € zahlen. Vor Beginn der Ziehung muss der Spieler festlegen, wie viele Kugeln er ziehen möchte. X beschreibt den Gewinn/Verlust des Spielers pro Spiel.

- Stefan ist vorsichtig. Er will nur eine Kugel ziehen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gewinns X .
- Vera ist der Meinung, dass ihre Chancen besser sind, wenn sie drei Kugeln zieht. Berechnen Sie ebenfalls Erwartungswert und Standardabweichung des Gewinns X . Beurteilen Sie die Strategien von Stefan und Vera im Vergleich.

3. Würfelstrategie

Peter würfelt gegen die Bank. Bei einem beliebigen Einsatz bekommt er den 2-fachen Einsatz ausbezahlt, wenn die gewürfelte Zahl gerade ist, und er geht leer aus, wenn die gewürfelte Zahl ungerade ist. Peter möchte sein Glück erzwingen und spielt nach folgender Verdoppelungsstrategie:

Er setzt 1 € und will im Gewinnfall aufhören. Gewinnt er beim ersten Spiel noch nicht, so will er im zweiten Spiel den Einsatz auf 2 € verdoppeln, dann wieder im Gewinnfall aufhören und im Verlustfall bei erneut verdoppeltem Einsatz (4 €) abermals sein Glück versuchen. Da irgendwann eine gerade Zahl gewürfelt wird, glaubt Peter, so einen Gewinn erzwingen zu können.

- Peter hat 63 €. Wie oft kann er maximal spielen?
- Bestimmen Sie seinen Gewinn bzw. Verlust, wenn er im ersten, erst im zweiten, erst im dritten, ..., in keinem Spiel gewinnt.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert für Peters Gewinn/Verlust.

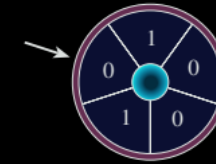
4. Münzspiel

Felix besitzt 4 €. Er nimmt an folgendem Spiel teil: Der Spieler wirft zweimal eine faire Münze. Jedesmal, wenn Kopf fällt, wird sein Guthaben halbiert. Fällt Zahl, wird sein Guthaben verdoppelt. X sei das Guthaben des Spielers am Ende des Spiels.

- Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X . Ist das Spiel fair?
- Das Spiel soll fair gemacht werden. Dazu wird, wenn Zahl fällt, das Guthaben nicht verdoppelt, sondern mit dem Faktor $a > 0$ vervielfacht. Wenn Kopf fällt, bleibt es bei der Halbierung des Guthabens. Wie muss a gewählt werden?

1. Glücksrad

Beim abgebildeten Glücksrad mit fünf gleich großen Sektoren wird nach dem Drehen im Stillstand durch einen Pfeil angezeigt, ob man einen Treffer (1) oder eine Niete (0) erzielt hat. Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:



- A: genau fünf Treffer
C: mehr Treffer als Nieten

- B: höchstens zwei Treffer
D: erster Treffer im zehnten Versuch

2. Führerscheintest

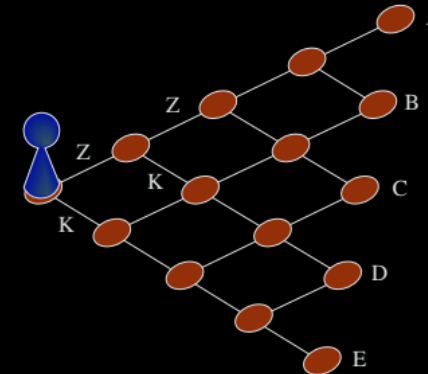
Ein Führerschein-Test besteht aus 6 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Eine Testperson beantwortet jede Frage auf gut Glück.

X sei die Zufallsgröße, die die Anzahl der richtig beantworteten Fragen beschreibt.

- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung tabellarisch und graphisch dar.
- Berechnen Sie den Erwartungswert, die Standardabweichung und die Varianz der Verteilung.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kandidat den Test besteht, wenn er auf gut Glück jeweils eine Antwort ankreuzt. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 4 Fragen richtig beantwortet sind.

3. Münzwurfspiel

Ein Spieler rückt auf dem abgebildeten Spielfeld vom Startpunkt ausgehend nach rechts vor, wenn er mit einer Münze Kopf wirft. Wirft er Zahl, rückt er nach links vor. Nach vier Münzwürfen kommt er in einer der Positionen A bis E an, womit das Spiel endet.



- Geben Sie alle Wurfserien an, die zu Position A bzw. zu Position C führen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Der Spieler erreicht A.“
 E_2 : „Der Spieler erreicht C.“
 E_3 : „Der Spieler erreicht C oder D.“

- Ein Spieler führt 10 Spiele durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er genau dreimal Position C?
- Untersuchen Sie, wie viele Spiele der Spieler mindestens machen muss, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal Position A erreicht werden soll.