Mathematik Q2 Abels

Kopfübung

- Parameterform einer Ebene:

- Skizze:

Ebenengleichungen (Forts.)

Wie würdest du eine Ebene im Raum vektoriell beschreiben?

Was benötigst du, um eine Ebene eindeutig zu beschreiben?

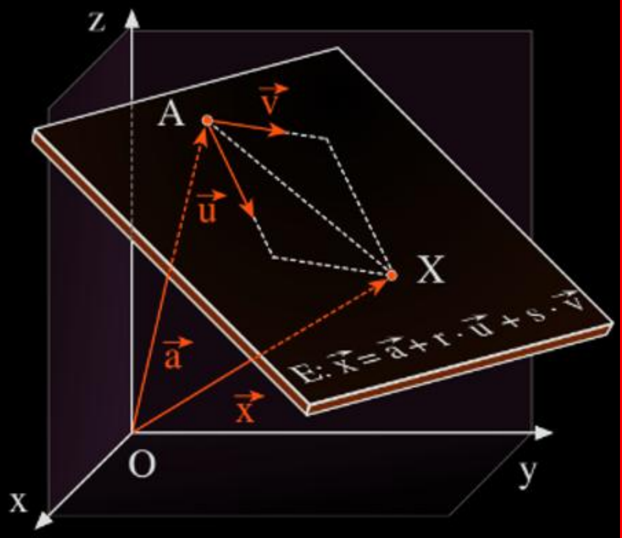
Ebenengleichung – Parameterform

!

Eine Ebene mit **Stützvektor** $\vec{a}$ und **Richtungsvektoren** $\vec{u}, \vec{v}$ und **Parametern** $r, s \in \mathbb{R}$ kann durch eine Gleichung dargestellt werden:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Somit ist eine Ebene die Menge aller **Vektoren** $\vec{x}$,
für die es ein r und ein s gibt, sodass die Gleichung gilt.



Big228

Übung 1 **Dreipunktegleichung**

Wie lautet die Gleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält? Fertigen Sie ein Schrägbild an.

a) $A(6|6|0)$ b) $A(-2|0|5)$ c) $A(5|3|-1)$
$B(0|3|2)$ $B(-4|2|0)$ $B(7|2|-1)$
$C(4|0|2)$ $C(0|3|-2)$ $C(6|0|1)$

Übung 2 **Pyramide**

Eine Pyramide hat als Grundflächeneckpunkte $A(2|2|0)$, $B(8|8|1)$ und $C(-4|3|1)$ und die Spitze $S(0|2|5)$.
Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide und stellen Sie die Gleichungen der Ebenen E_1, E_2 und E_3 auf, welche jeweils eine der Seitenflächen der Pyramide enthalten.

Big228

1. a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

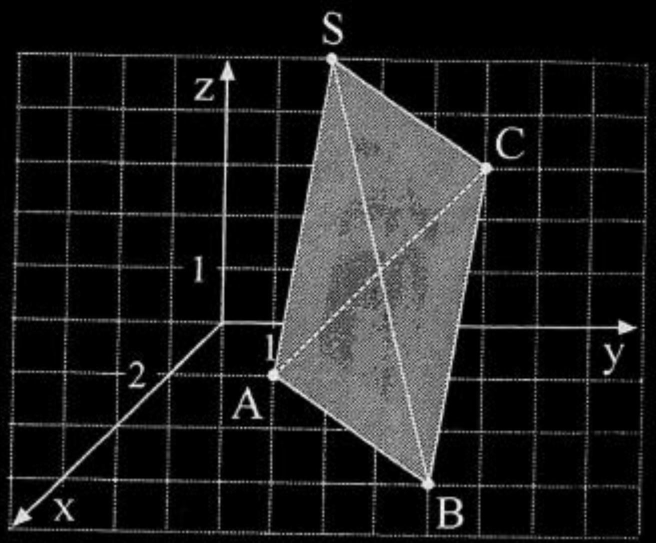
b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $E_1(ABS)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$E_2(ACS)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$E_3(BCS)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$



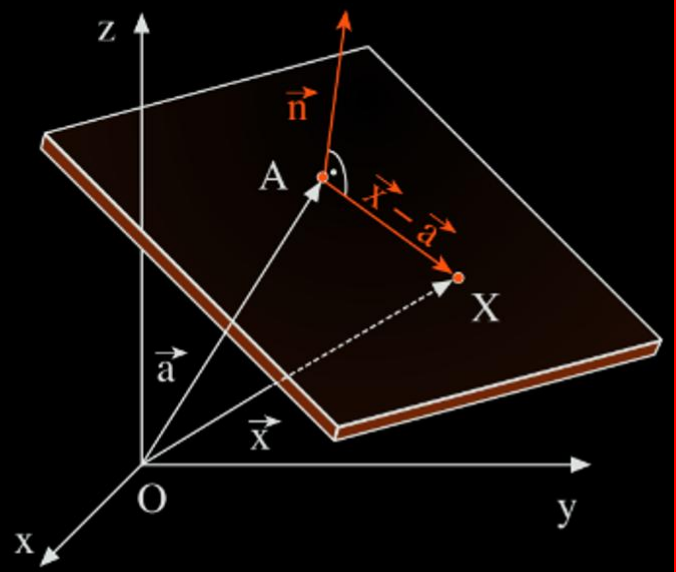
Ebenengleichung – Normalenform

!

Eine Ebene mit **Stützvektor** $\vec{a}$ und **Normalenvektor** $\vec{n}$ kann durch eine Gleichung dargestellt werden:

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Somit ist eine Ebene die Menge aller **Vektoren** $\vec{x}$, für die die Gleichung gilt.



Big230,231

Beispiel: Parametergleichung (drei Punkte) → Normalengleichung

Gesucht ist eine Normalengleichung der Ebene E durch die Punkte A(3|2|4), B(5|1|6) und C(1|4|3).

Beispiel: Normalengleichung → Parametergleichung

Gesucht ist eine Parametergleichung der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = 0.$

Übung 3

Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene E auf.

a) E geht durch die Punkte A(1|1|−3), B(0|2|2) und C(2|1|−5).

b) E hat die Parameterdarstellung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$.

Übung 4

Jeweils zwei der folgenden Gleichungen stellen die gleiche Ebene dar. Stellen Sie die zueinander gehörende Paare fest.

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$ $\qquad$ E_4: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\-6\end{pmatrix}$ $\qquad$ E_5: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$

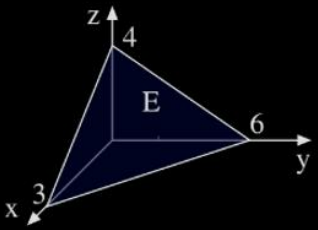
E_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\7\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ E_6: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} = 0$

Oft treten Ebenen in Körpern auf, z. B. als Seitenflächen. Dann stellt sich das Problem, aus der Zeichnung eine Parametergleichung oder eine Normalengleichung zu gewinnen (Übung 5).

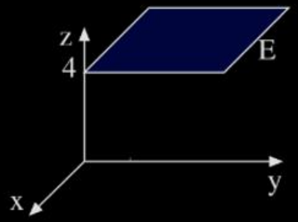
Übung 5

Stellen Sie die Ebene durch eine geeignete Gleichung dar.

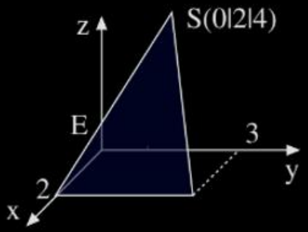
a)



b)



c)



Big230,231

Beispiel: Parametergleichung (drei Punkte) → Normalengleichung

Wir stellen zunächst die Parametergleichung der Ebene auf.

Den Stützvektor für die Normalengleichung können wir aus der Parametergleichung direkt übernehmen.

Parametergleichung von E:

$$E\colon \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

Die beiden Richtungsvektoren ermöglichen uns die Bestimmung eines Normalenvektors $\vec{n}$. Dieser muss zu beiden Richtungsvektoren senkrecht stehen.

Bestimmung eines Normalenvektors $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{also } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt auf ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die drei Unbekannten x, y und z.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x - y + 2z = 0 \\ \text{II:} & -2x + 2y - z = 0 \\ \hline \text{III} = \text{I} + \text{II:} & y + z = 0 \end{array}$$

Eine Variable kann frei gewählt werden, da das System unterbestimmt ist. Wir wählen $z = c$. Die allgemeine Lösung des Systems lautet dann: $x = -1{,}5c$, $y = -c$ und $z = c$. Da wir nur eine Lösung benötigen, können wir c frei festlegen.
Für $c = 2$ erhalten wir $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

z wird frei gewählt: $z = c$
Aus III folgt dann: $y = -c$
Aus I folgt dann: $x = -1{,}5c$

Setzen wir $c = 2$, so folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Nun können wir eine Normalengleichung der Ebene aufstellen.

Resultat: $E\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$

Normalengleichung von E:

$$E\colon \left[\vec{x} - \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}}\right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$$

Beispiel: Normalengleichung → Parametergleichung

Den Stützvektor für die Parametergleichung können wir auch hier direkt aus der Normalengleichung übernehmen.

Der Normalenvektor gestattet uns in einfacher Weise – wie rechts dargestellt – die Bestimmung von zwei nicht kollinearen Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Bestimmung der Richtungsvektoren:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = 0, \quad \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix} = 0$$

Wir setzen eine der drei gesuchten Richtungskoordinaten gleich 0 und bestimmen die beiden anderen – wie rechts farbig dargestellt – aus zwei Koordinaten des Normalenvektors.

Parametergleichung:

$$E\colon \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} \cdot + r\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

Big230,231

3. a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

   b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

4. $E_1 = E_5$, $E_2 = E_6$, $E_3 = E_4$

5. a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

   b) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

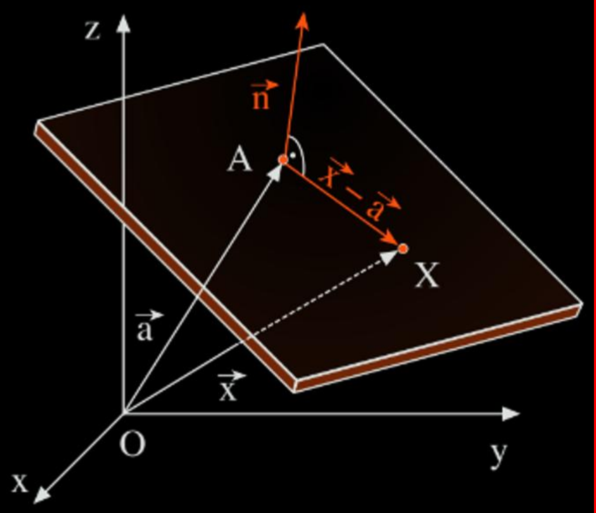
Ebenengleichung – Koordinatenform

Eine Ebene mit **Stützvektor** $\vec{a}$ und **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ kann durch eine Gleichung dargestellt werden:

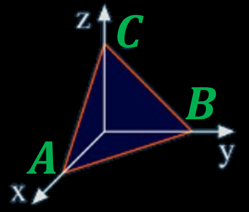
$\vec{a} \cdot \vec{n}$

$$E: ax + by + cz = d$$

Somit ist eine Ebene die Menge aller **Vektoren** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, für die die Gleichung gilt.



Sonderfall



$$E: \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Big232-234

Beispiel: Normalengleichung → Koordinatengleichung

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0.$

Beispiel: Koordinatengleichung → Normalengleichung

Gesucht ist eine Normalengleichung der Ebene E: $2x + 3y - z = 6$.

Beispiel: Achsenabschnitte und Schrägbild

Gegeben sei die Ebene E mit der Koordinatengleichung E: $3x + 6y + 4z = 12$.
Bestimmen Sie diejenigen Punkte, in welchen die Koordinatenachsen die Ebene durchstoßen, und zeichnen Sie mit Hilfe dieser Punkte ein Schrägbild der Ebene.

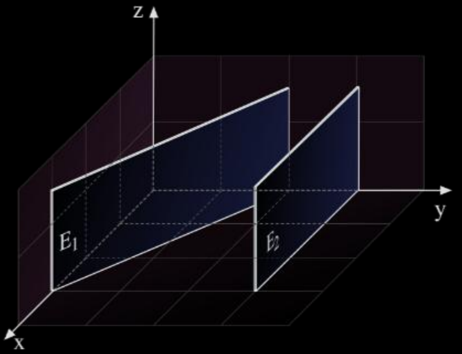
Übung 6

a) Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Ebene E: $4x + 6y + 6z = 24$ und zeichnen Sie ein Schrägbild der Ebene.
b) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Ebene E: $2x + 5y + 4z = 10$.
c) Welche Achsenabschnitte besitzt die Ebene E: $2x + 4z = 8$?
Beschreiben Sie die Lage dieser Ebene im Koordinatensystem.

Bemerkung: Fehlen in der Koordinatengleichung einer Ebene eine oder mehrere Variable, so nimmt die Ebene im Koordinatensystem eine besondere Lage ein.

Beispiel: Die Ebene E_1: $2x + 3y = 6$ hat die Achsenabschnitte $x = 3$ $(y = 0,\ z = 0)$ und $y = 2$ $(x = 0,\ z = 0)$.
Sie hat keinen z-Achsenabschnitt, denn sie ist parallel zur z-Achse.

Beispiel: Die Ebene E_2: $2y = 6$ hat den y-Achsenabschnitt $y = 3$.
Sie hat keinen x-Achsenabschnitt und keinen z-Achsenabschnitt; sie ist nämlich parallel zur x-Achse und zur z-Achse, also zur x-z-Ebene.

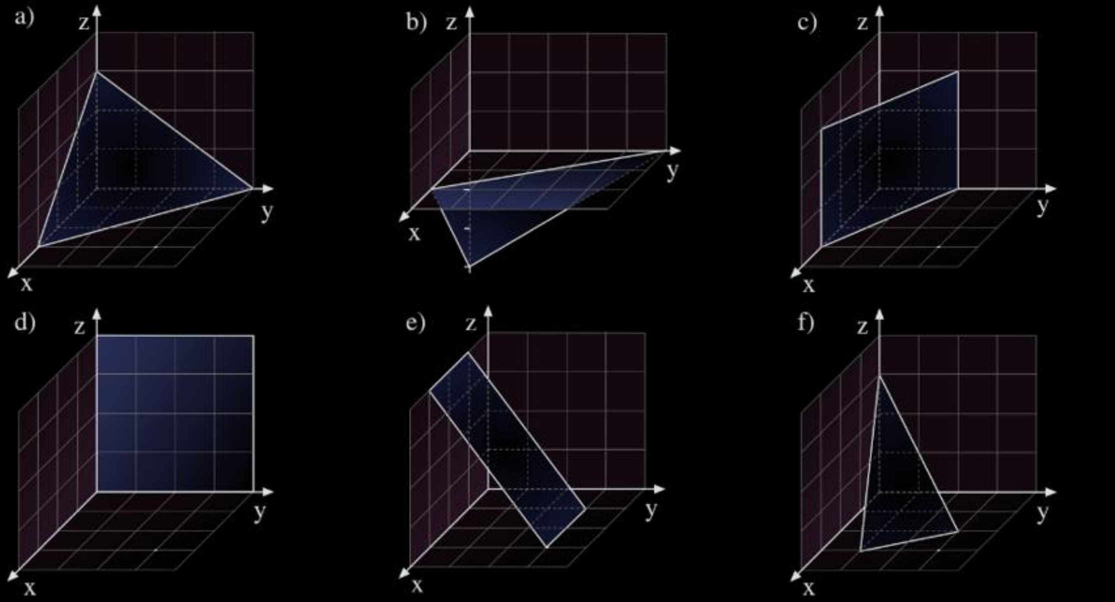


Beispiel: Achsenabschnitte

Wie lauten die Achsenabschnitte der Ebene E: $4x + 2y = 12$?

Übung 7

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der abgebildeten Ebene E. Eine Einheit entspricht einer Karolänge.



Übung 8

Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Ebene E und zeichnen Sie ein Schrägbild der Ebene.

a) E: $2x + 4y + z = 4$ b) E: $-3x + 4y + 8z = 12$ c) E: $-2x + y - 2z = 4$
d) E: $2y + 3z = 6$ e) E: $4x = 8$ f) E: $z = 2$

Big232-234

Beispiel: Normalengleichung → Koordinatengleichung

Wir überführen die Normalengleichung zunächst in ihre vereinfachte Form:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - 19 = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 19$$

Nun ersetzen wir den Vektor $\vec{x}$ durch seine Spaltenkoordinatenform und multiplizieren aus:

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 19 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 19 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = 19.$$

Beispiel: Koordinatengleichung → Normalengleichung

Besonders leicht ist eine vereinfachte Normalengleichung zu bestimmen. Dazu stellen wir einfach die linke Seite der Koordinatengleichung als Skalarprodukt dar.

$$E\colon\ 2x + 3y - z = 6 \Rightarrow E\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = 6 \Rightarrow E\colon\ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = 6$$

Eine weitere Möglichkeit: Wir entnehmen der Koordinatengleichung durch Einsetzen geeigneter Koordinaten einen Stützpunkt, z. B. $A(3|0|0)$, sowie durch Ablesen der Koeffizienten der linken Seite einen Normalenvektor.

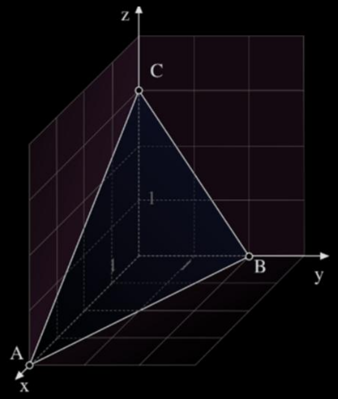
Dann lautet eine Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = 0.$

Beispiel: Achsenabschnitte und Schrägbild

Der Achsenabschnittspunkt auf der x-Achse hat die Gestalt $A(x|0|0)$. Setzen wir in der Koordinatengleichung $y = 0$ und $z = 0$, so erhalten wir $3x = 12$, d. h. $x = 4$. Also ist $A(4|0|0)$ der gesuchte Achsenabschnittspunkt auf der x-Achse.

Analog erhalten wir die beiden weiteren Achsenabschnittspunkte $B(0|2|0)$ und $C(0|0|3)$.

Tragen wir diese drei Punkte in ein Koordinatensystem ein, so können wir einen dreieckigen Ebenenausschnitt darstellen.



Beispiel: Achsenabschnitte

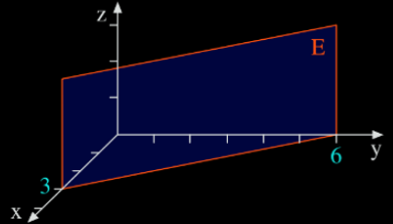
$E\colon\ 4x + 2y = 12 \quad |:12$

$E\colon\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$

x-Achsenabschnitt: $A = 3$

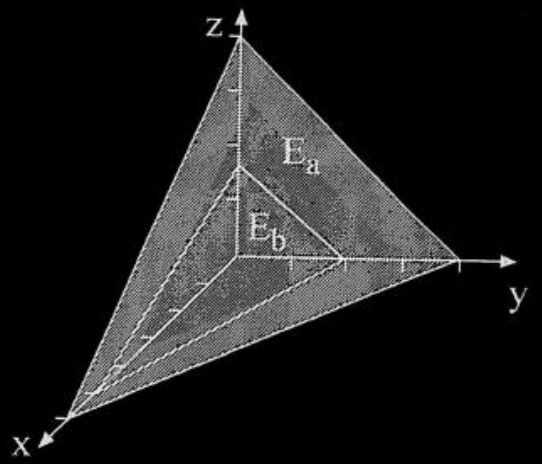
y-Achsenabschnitt: $B = 6$

z-Achsenabschnitt: Nicht vorhanden, da E parallel zur z-Achse



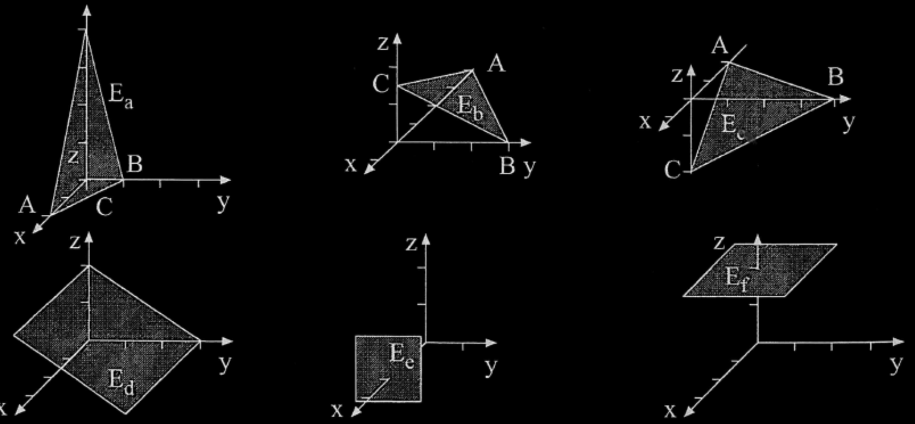
Big232-234

6. a) A(6|0|0), B(0|4|0), C(0|0|4)
   b) Achsenabschnitte: X(5|0|0), Y(0|2|0), Z(0|0|2,5)
   c) A(4|0|0), C(0|0|2)
   kein y-Achsenabschnitt
   Die Ebene verläuft parallel zur y-Achse.



7. a) Die Achsenschnittpunkte sind X(3|0|0), Y(0|4|0), Z(0|0|3). Wir setzen diese Achsenschnittpunkte in die Achsenabschnittsform ein und erhalten E: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$ bzw. E: $4x+3y+4z=12$.
   b) X(2|0|0), Y(0|5|0), Z(0|0|–3) $\Rightarrow$ E: $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{-3}=1$ bzw. E: $15x+6y-10z=30$
   c) X(3|0|0), Y(0|2|0), parallel zur z-Achse $\Rightarrow$ E: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ bzw. E: $2x+3y=6$
   d) y-x-Ebene, geht durch den Ursprung, parallel zur y- und z-Achse $\Rightarrow$ E: $x=0$
   e) parallel zur x-Achse, Y(0|3|0), Z(0|0|4) $\Rightarrow$ E: $4y+3z=12$
   f) X(3,5|0|0), Y(0|7|0), Z(0|0|3) $\Rightarrow$ E: $6x+3y+7z=21$

8. a) X(2|0|0), Y(0|1|0), Z(0|0|4)
   b) X(-4|0|0), Y(0|3|0), Z(0|0|1,5)
   c) X(-2|0|0), Y(0|4|0), Z(0|0|-2)
   d) kein X (parallel zur x-Achse)
   Y(0|3|0), Z(0|0|2)
   e) X(2|0|0), kein Y, kein Z (da parallel zur y- und z-Achse)
   f) kein X, kein Y, Z(0|0|2) (da parallel zur x- und y-Achse)



Ebenengleichungen

!

Parameterform

$$E\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_z \\ -n_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$d = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n} \qquad d = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \vec{a}$$

Normalenform

$$E\colon (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$E\colon ax + by + cz = d$$

Big235

9. Ebenengleichungen

Stellen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C in Parameterform, in Normalenform und in Koordinatenform auf.

a) $A(1|2|-2)$, $B(0|5|0)$, $C(5|0|-2)$ b) $A(2|1|1)$, $B(4|2|2)$, $C(3|3|4)$

10. Verschiedene Darstellungen einer Ebene

Eine Ebenengleichung kann auf drei Arten angegeben werden: Parameterform, Normalenform und Koordinatenform. Bestimmen Sie für die Ebene E die beiden fehlenden Formen.

a) E: $-4x + 5y + 3z = 12$ b) E: $x + 2z = 4$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\\-10\end{pmatrix}$ d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

11. Aufstellen der Koordinatengleichung

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der beschriebenen Ebene E auf.

a) E geht durch $A(0|2|0)$, $B(2|1|2)$, $C(1|0|2)$.
b) E ist die x-y-Ebene.
c) E ist die x-z-Ebene.
d) E enthält die z-Achse, den Punkt $P(1|1|0)$ und steht senkrecht auf der x-y-Ebene.

12. Achsenabschnitt einer Ebene

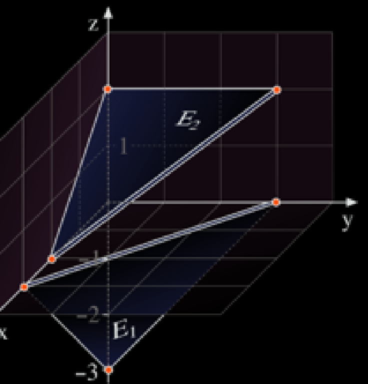
a) Bestimmen Sie die Achsenabschnittspunkte der Ebene E: $3x + 6y - 3z = 12$ und skizzieren Sie einen Ebenenausschnitt im Koordinatensystem.
b) Welche Achsenabschnitte hat die Ebene E: $2x + 5y = 10$?
Beschreiben Sie die Lage der Ebene im Koordinatensystem verbal und fertigen Sie anschließend ein Schrägbild an.
c) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E: $2z = 8$ im Koordinatensystem (mit Schrägbild).

13. Aufstellen der Koordinatengleichung

Gesucht ist eine Koordinatengleichung der beschriebenen oder dargestellten Ebenen.

a) Es handelt sich um die x-y-Ebene.
b) Die Ebene hat die Achsenabschnitte $x = 4$, $y = 2$, $z = 6$.
c) Die Ebene enthält den Punkt $P(2|1|3)$ und ist zur y-z-Ebene parallel.
d) Die Ebene geht durch den Punkt $P(4|4|0)$ und ist parallel zur z-Achse. Ihr y-Achsenabschnitt beträgt $y = 12$.
e) Die Ebene enthält die Punkte $A(2|-1|5)$, $B(-1|-3|9)$ und ist parallel zur z-Achse.

f)



Big235 - Lösungen

9. a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}=0$, $2x+4y-5z=20$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}=0$, $x-5y+3z=0$

10. a) $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix}=0$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$

b) $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=0$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=0$, $3x-2y+z=3$

d) $E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}=0$, $-x+4y+5z=18$

11. a) $-2x+2y+3z=4$
b) $z=0$
c) $y=0$
d) $x-y=0$

12. a) $X(4|0|0)$, $Y(0|2|0)$, $Z(0|0|-4)$
b) $X(5|0|0)$, $Y(0|2|0)$
Die Ebene verläuft parallel zur z-Achse.
c) $Z(0|0|4)$, Die Ebene geht durch den Punkt Z und verläuft parallel zur x-y-Ebene.

13. a) E: $z=0$ b) E: $3x+6y+2z=12$ c) E: $x=2$

d) $X(6|0|0)\in E$, E: $2x+y=12$

e) E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, E: $2x-3y=7$

f) $E_1: x+y-z=3$, $E_2: x+z=2$