Mathematatik Q2 Abels

Kopfübung

- **Punkte im Koordinatensystem**: Abstand zweier Punkte im Raum
- **Vektor**: Spaltenvektor, Veschiebungsvektor, Ortsvektor, Betrag
- **Addition und Subtraktion von Vektoren**: Addition, Nullvektor, Gegenvektor, Subtraktion, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz
- **Skalar-Multiplikation von Vektoren**: Skalare Multiplikation, Distributivgesetz, Assoziativgesetz
- **Linearkombination von Vektoren**
- **Kollineare und Komplanare Vektoren**
- **Skalarprodukt**: Kosinusform, Koordinatenform
- **Winkel und Flächen**: Betrag, Kosinus, Orthogonalität, Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Cheatsheet

!

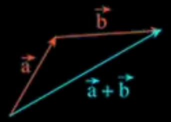
Der Abstand von zwei Punkten

Ebene: Abstand von $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$: $d(A;B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Raum: Abstand von $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$: $d(A;B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

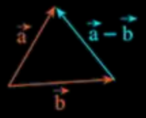
Die Summe zweier Vektoren

Die Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: Man legt die Pfeile wie abgebildet aneinander. Der Summenvektor führt vom Pfeilanfang von $\vec{a}$ zum Pfeilende von $\vec{b}$.



Die Differenz zweier Vektoren

Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: Man legt die Pfeile wie abgebildet aneinander. Der Differenzvektor führt vom Pfeilende von $\vec{b}$ zum Pfeilende von $\vec{a}$.



Die Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Der Vektor $\vec{a}$ wird mit der Zahl k multipliziert, indem seine Länge mit dem Faktor $|k|$ multipliziert wird. Ist k negativ, so kehrt sich zusätzlich die Pfeilorientierung um.

Linearkombination von Vektoren

Eine Summe der Form $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n$ $(r_i \in \mathbb{R})$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ bezeichnet.

Kollineare Vektoren

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen kollinear, wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$

Kollineare Vektoren sind parallel.

Komplanare Vektoren

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und heißen komplanar, wenn einer der drei Vektoren als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellbar ist:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ oder $\vec{b} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$
oder $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Komplanare Vektoren liegen in einer Ebene.

Skalarprodukt:

Kosinusform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ $(0° \le \gamma \le 180°)$

Koordinatenform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Betrag eines Vektors:

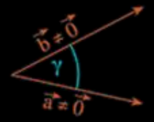
Der Betrag eines Vektors ist die Länge eines seiner Pfeile.

Ebene: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

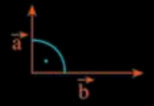
Winkel zwischen Vektoren:

Kosinusformel: $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



Orthogonale Vektoren:

$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

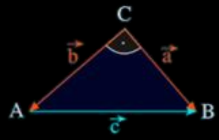


Rechtwinkliges Dreieck:

Das Dreieck ABC ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

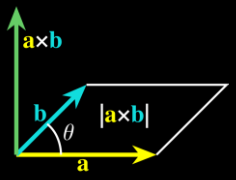
(1) $c^2 = a^2 + b^2$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



Flächeninhalt eines Dreiecks:

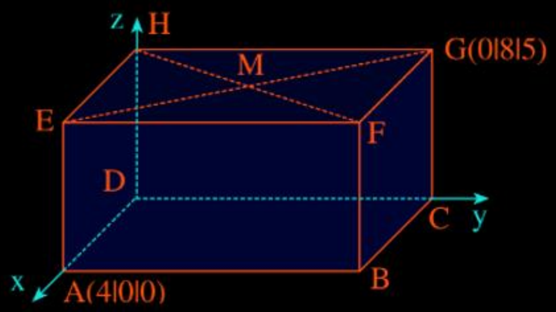
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



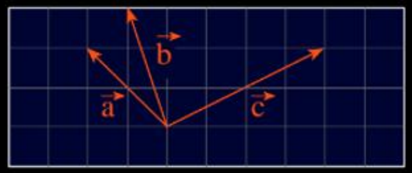
Gemischte **Übungen**

Big88 – Test

1. Gegeben ist der Quader ABCDEFGH.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B, C, D, E, F, H und M.
b) Bestimmen Sie die Länge der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{DM}$.



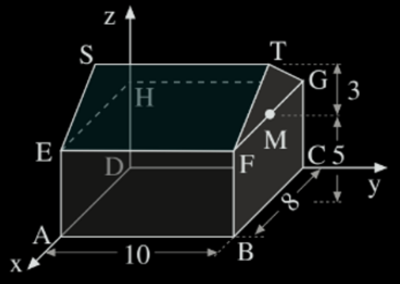
2. Bilden Sie die Summe der drei dargestellten Vektoren
a) durch zeichnerische Konstruktion,
b) durch Rechnung mit Spaltenvektoren.



3. Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dar.

4. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (6|7|9), B (4|4|3) und C (2|10|6).
a) Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Ist es sogar gleichseitig?
b) Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks an.
c) Gesucht ist ein weiterer Punkt D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

5. Die Graphik zeigt die Planskizze eines Gebäudes mit Dach. Es ist ein Quader mit einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecksprisma ($|SE| = |SH| = |FT| = |GT|$).
M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FG}$.
a) Stellen Sie den Vektor $\vec{m} = \overrightarrow{AM}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ der Hauskanten dar.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten aller eingezeichneten Punkte.
c) Wie groß ist die Dachfläche EFTS?
d) Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\measuredangle$FTG.
e) Wie groß ist der Steigungswinkel α der Dachfläche EFTS?
f) Wie groß ist der Abstand der Punkte S und F?



$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BF}$

6. Gegeben seien zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene. $\vec{c}$ sei ein weiterer Vektor in der Ebene. Entscheiden Sie, ob man den Vektor $\vec{c}$ in jedem Fall als Linearkombinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen kann.

Big88 – Lösungen

1. a) B(4|8|0), C(0|8|0), D(0|0|0), E(4|0|5), F(4|8|5), H(0|0|5), M(2|4|5)
   b) $|\overline{AF}| = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9{,}43$, $|\overline{DM}| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$

2. a) $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

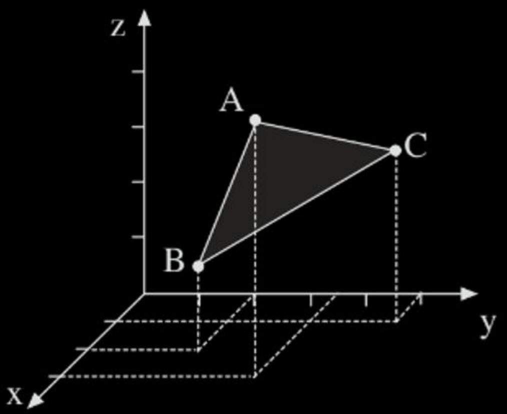
4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$

   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$,

   $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{34}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{49} = 7$

   Das Dreieck ist gleichschenklig, aber nicht gleichseitig.

   b)



   c) $\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\10\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$

   D(0|7|0) (bzw. D(4|13|12) oder D(8|1|6))

5. a) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

   c) $|ES| = 5$, $|EF| = 10$, $A = 50$

   d) $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix}}{25} = \dfrac{-7}{25}$, $\alpha \approx 106{,}3°$

   f) $|SF| = \sqrt{16 + 100 + 9} = \sqrt{125} \approx 11{,}19$

   b) A(8|0|0), B(8|10|0), C(0|10|0), D(0|0|0), E(8|0|5), F(8|10|5), G(0|10|5), H(0|0|5), T(4|10|8), S(4|0|8)

   e) $\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}}{20} = \dfrac{4}{5}$, $\beta \approx 36{,}9°$

6. Nur wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind.