Mathematik Q2 Abels

Kopfübung

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cdots$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cdots$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 1$

Winkel- und Flächenberechnungen

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = ?$$

$$|\vec{a}| = ?$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\gamma = ?$$

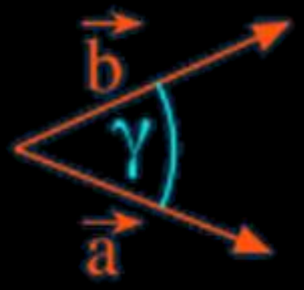
Winkel und Flächen

Der Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Die Kosinusformel

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Big77,78

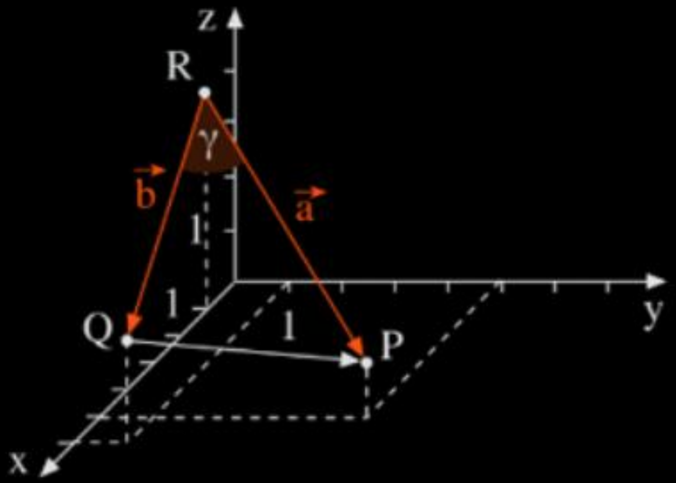
Beispiel: Winkel zwischen zwei Vektoren

Errechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel: Winkel im Dreieck

Gegeben sei das Dreieck mit den Ecken $P(5|5|1)$, $Q(6|1|2)$, $R(1|0|4)$. Bestimmen Sie die Größe des Innenwinkels γ am Punkt R des Dreiecks.



Übung 1 Winkel zwischen Vektoren

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

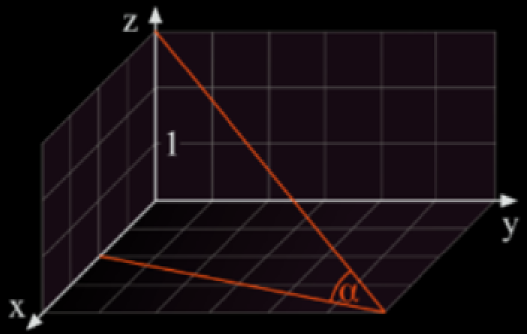
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 2 Winkel in Ebene und Raum

Bestimmen Sie die Größe des Winkels α mit Hilfe von Vektoren.

a)

b)



Übung 3 Winkel im Dreieck

Bestimmen Sie alle Winkel im Dreieck PQR.

a) $P(3|4)$, $Q(6|3)$, $R(3|0)$
b) $P(3|4|1)$, $Q(6|3|2)$, $R(3|0|3)$
c) $P(6|3|8)$, $Q(7|4|3)$, $R(4|4|2)$
d) $P(1|2|2)$, $Q(3|4|2)$, $R(2|3|2+\sqrt{3})$

Übung 4 Parameteraufgabe

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie diejenigen Werte der Koordinate z, damit der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Größe von 45° hat.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

Winkel und Flächen (Forts.)

Orthogonalitätskriterium

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Big79

Beispiel: Orthogonale Vektoren

Prüfen Sie, ob zwei der drei Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Prüfen Sie, ob das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(2|2|2)$, $C(0|3|1)$ rechtwinklig ist (Schrägbild anfertigen).

Übung 5 Orthogonale Vektoren

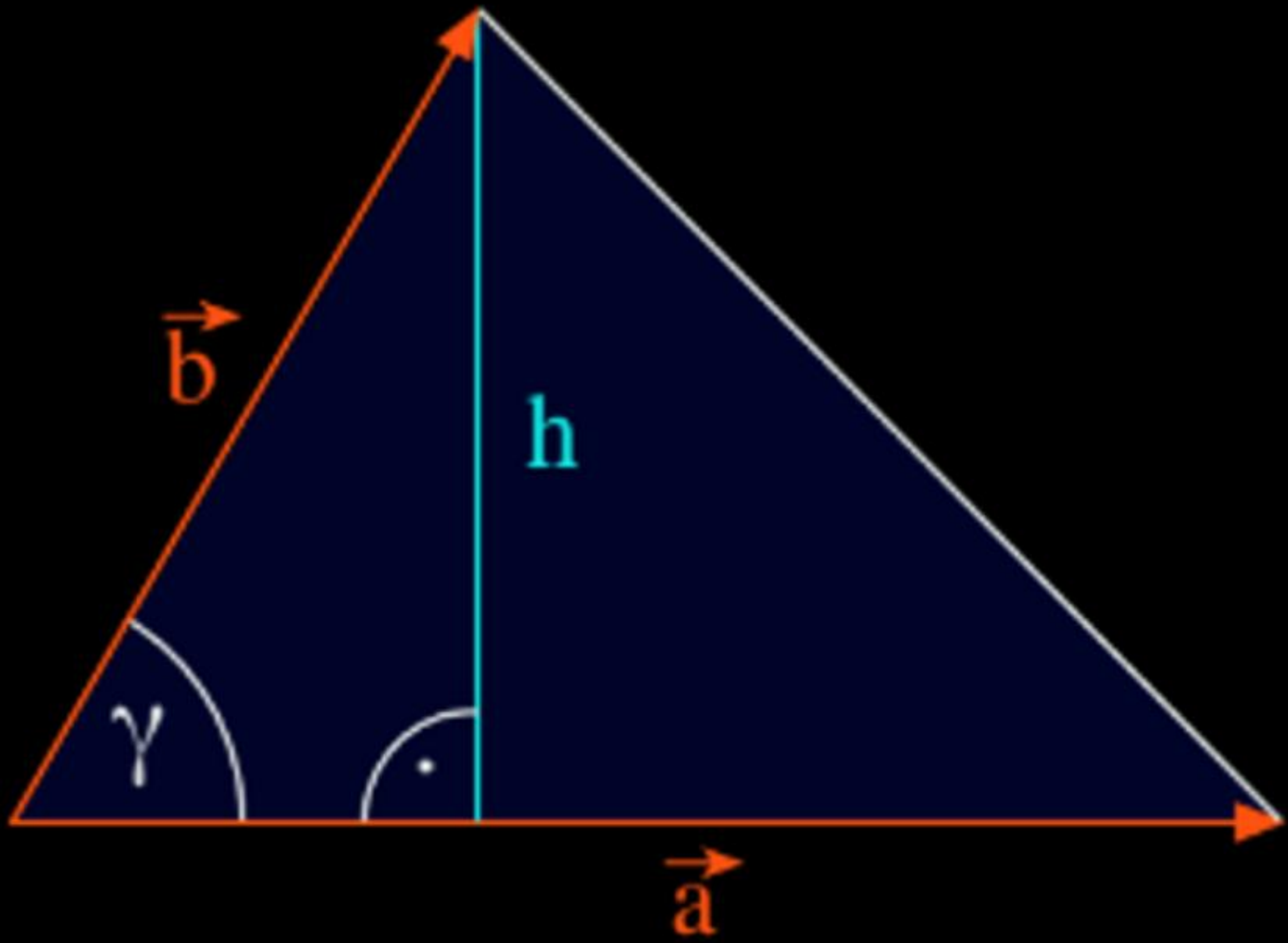
Suchen Sie unter den gegebenen Vektoren alle Paare orthogonaler Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übung 6 Rechtwinklige Dreiecke

Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

a) $A(2|2|0)$, $B(1|4|2)$, $C(3|2|5)$
b) $A(3|-1|2)$, $B(4|2|1)$, $C(-3|2|5)$
c) $A(2|5|3)$, $B(6|7|-1)$, $C(3|7|5)$


$\vec{b}$
h
γ
$\vec{a}$

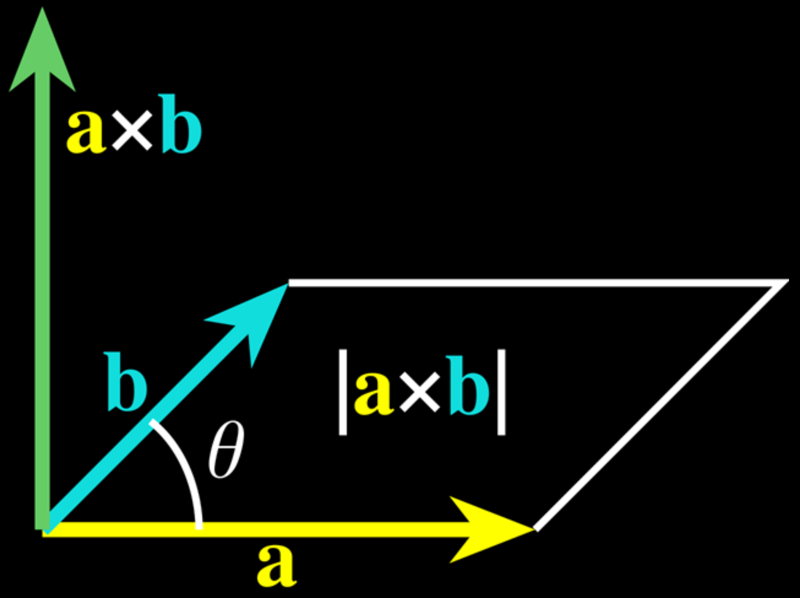
Winkel und Flächen (Forts.)

!

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht (rechtwinklig) auf beiden (!) Vektoren liegt und dessen Länge den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms beträgt.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



Big80,81

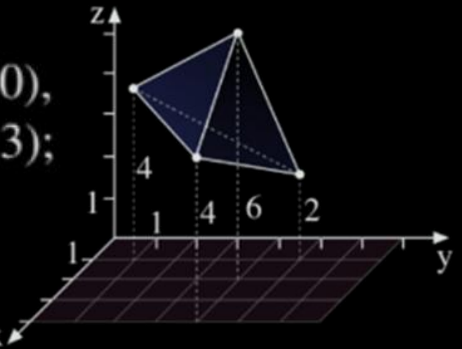
Beispiel: Bestimmen Sie den Inhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A (1|2|5), B (4|5|1), C (–2|6|2).

Übung 7 Oberfläche einer Pyramide

Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide

a) mit den Eckpunkten A (3|3|0), B (1|1|4), C (6|0|2), D (4|4|3);

b) aus nebenstehendem Bild.



Übung 8 Inhalt eines Dreiecks

Wie muss z gewählt werden, damit das Dreieck ABC den Inhalt 15 besitzt?
A (1|1|2), B (1|–2|z), C (7|–2|6)

9. Winkel und Fläche eines Dreiecks

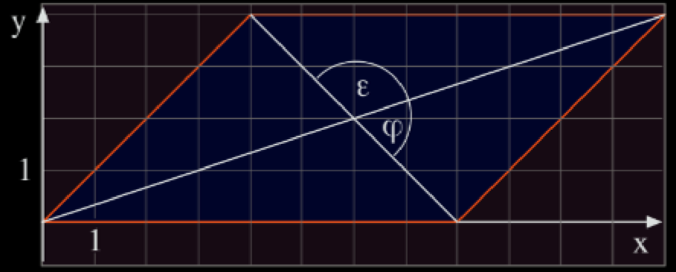
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (6|1|2), B (5|5|1) und C (1|0|4).

a) Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks an und berechnen Sie seine Innenwinkel.

b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC?

10. Parallelogramm

Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes die Innenwinkel ε und φ im abgebildeten Parallelogramm. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms konventionell und mittels Skalarprodukt (Hinweis: doppeltes Dreieck).

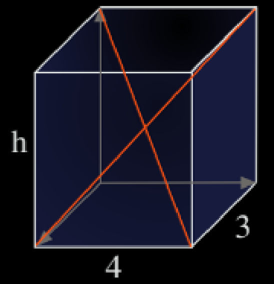


11. Rechtwinkliges Dreieck

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Dreieck ABC mit A (1|1) und B (4|5) rechtwinklig und gleichschenklig ist.

12. Winkel im Quader

Ein Quader hat die Grundflächenmaße 4×3. Wie muss seine Höhe h gewählt werden, wenn seine Raumdiagonalen sich senkrecht schneiden sollen?



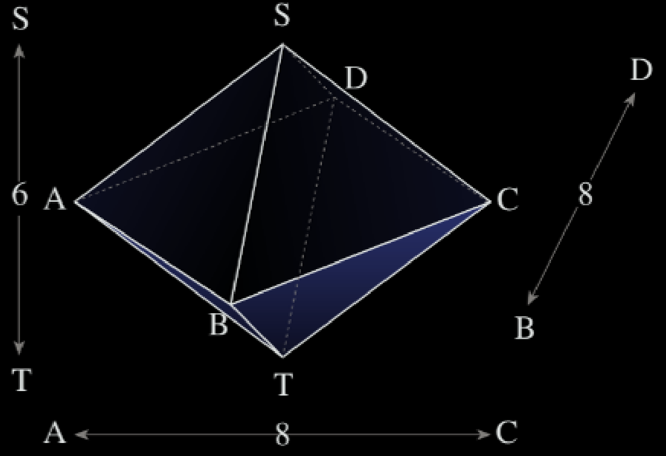
13. Doppelpyramide

Ein Edelstein hat die Form einer quadratischen Doppelpyramide mit den in der Zeichnung angegebenen Maßen (Abstände gegenüberliegender Ecken).

a) Welche Innenwinkel hat ein Seitendreieck der Pyramide?

b) Wie groß sind die Winkel ∢ASC bzw. ∢SBT?

c) Wie groß ist die Oberfläche des Körpers?



Big81

14. Pyramidenstumpf

Betrachtet wird ein regelmäßiger quadratischer Pyramidenstumpf.

a) Bestimmen Sie alle Eckpunktkoordinaten.

b) Errechnen Sie den Winkel $\sphericalangle ABF$.

c) Berechnen sie den Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{BH}$ und $\overline{DF}$. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittwinkel.

d) Welchen Oberflächeninhalt hat der Pyramidenstumpf?