Mathematatik Q2 Abels

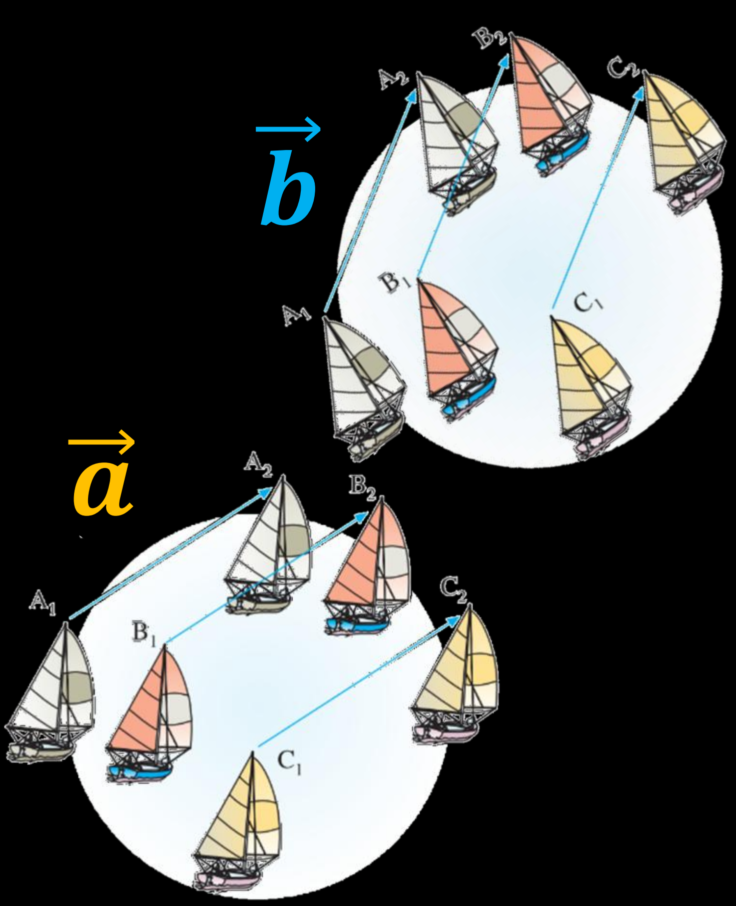
Kopfübung

Stellen Sie fest, für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen gelten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}| = 5$$

Rechnen mit Vektoren

Wenn ein Vektor wie der Windstoß von Schiffen ist, was ist dann die Summe (bzw. Differenz) zweier Vektoren?



Was bedeutet $\vec{a} + \vec{b}$ geometrisch?

Wie bestimme ich $\vec{a} + \vec{b}$ rechnerisch?

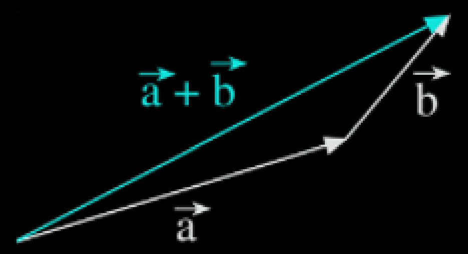
Was bedeutet $\vec{a} - \vec{b}$ geometrisch?

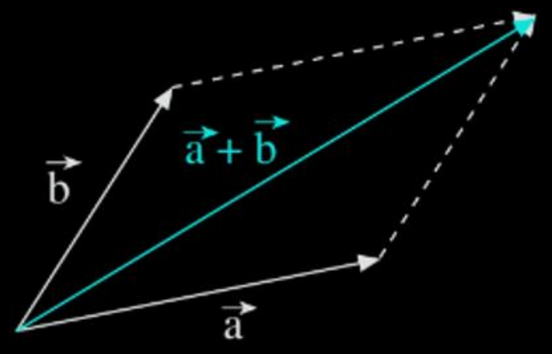
Wie bestimme ich $\vec{a} - \vec{b}$ rechnerisch?

Addition und Subtraktion von Vektoren

Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



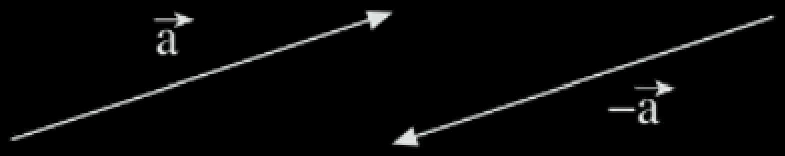


Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

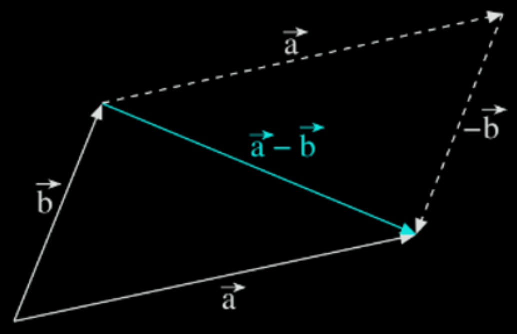
Gegenvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$



Subtraktion

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Kommutativgesetz der Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz der Addition

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

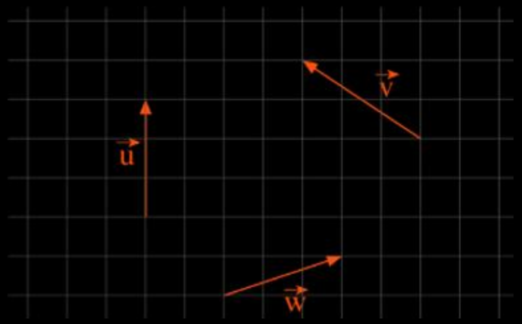
Big62-64

Übung 1 Summe von Vektoren
Berechnen Sie die Summe der beiden Vektoren, sofern dies möglich ist.

a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Übung 2 Summe von Vektoren
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die angegebene Summe.*

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$
d) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e) $\vec{v} + \vec{u}$
f) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ g) $\vec{u} + \vec{u}$

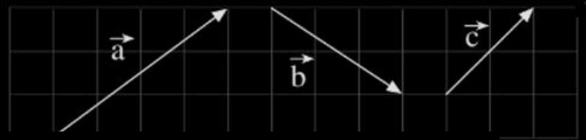


Übung 3 Assoziativgesetz
Bestimmen Sie für die gegebenen Vektoren die Terme $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ und $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Rechnerisch:

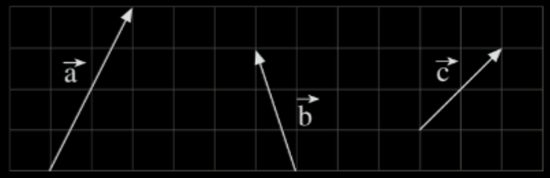
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Zeichnerisch:*



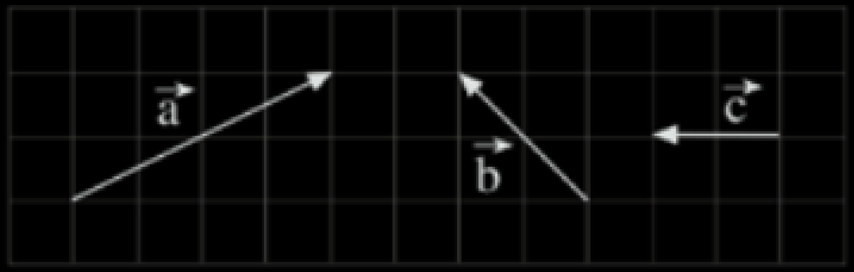
Übung 4 Subtraktion
Konstruieren Sie zeichnerisch den angegebenen Term (siehe auch S. 64).

a) $\vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{b} - \vec{a}$
c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{a}$ d) $-\vec{b} - \vec{a}$
e) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ f) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$



Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

Beispiel: Addition und Subtraktion von Vektoren
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
a) Addieren Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zeichnerisch.
b) Bestimmen sie $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ zeichnerisch.
c) Bestimmen Sie $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ rechnerisch.



Beispiel: Addition von Vektoren im dreidimensionalen Raum
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Addieren Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeichnerisch
im Koordinatensystem.

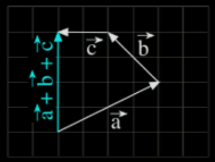
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Big62-64

Beispiel: Addition und Subtraktion von Vektoren

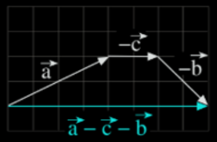
Lösung zu a:
Wir hängen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu einem Vektorzug aneinander. Die Summe $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ist der Vektor, der vom Anfangspunkt des Vektorzuges zum Endpunkt zeigt.

Zeichnerische Addition:



Lösung zu b:
Wir hängen nun die Vektoren $\vec{a}$, $-\vec{c}$ und $-\vec{b}$ zu einem Vektorzug aneinander.
$\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ ist nun wieder der Vektor, der vom Anfangspunkt des Vektorzugs zum Endpunkt führt.

Zeichnerische Addition:



Lösung zu c:
Wir stellen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Spaltenvektoren dar (Ablesen der Koordinaten aus der Zeichnung). Dann addieren bzw. subtrahieren wir diese rechnerisch. Das Ergebnis entspricht der zeichnerischen Lösung.

Zeichnerische Subtraktion:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

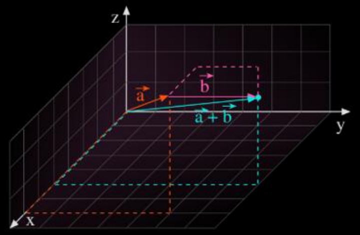
Beispiel: Addition von Vektoren im dreidimensionalen Raum

Lösung:
Wir hängen die zwei Vektoren wieder zu einem Vektorzug aneinander, um sie zu addieren. Zwecks besserer Übersicht deuten wir ihre Koordinaten durch gepunktete Linien an.

Das Resultat: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

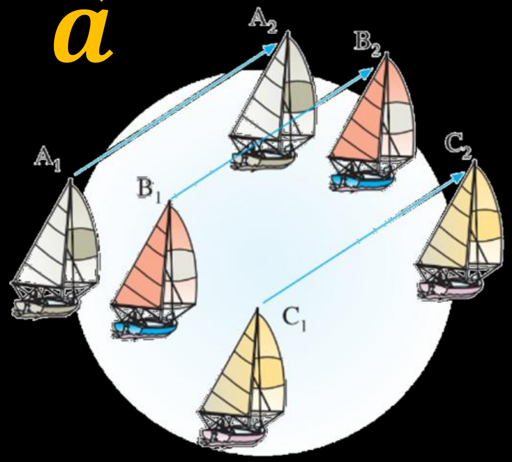
Wir erkennen, dass Vektoren im Raum nicht sehr anschaulich darstellbar sind. Hier sind die rechnerische Addition und Subtraktion einfacher durchzuführen.

Vektoraddition im Raum:



Wenn ein Vektor wie der Windstoß von Schiffen ist, was ist dann die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl?

$\vec{a}$



Was bedeutet $\mathbf{3} \cdot \vec{a}$ geometrisch?

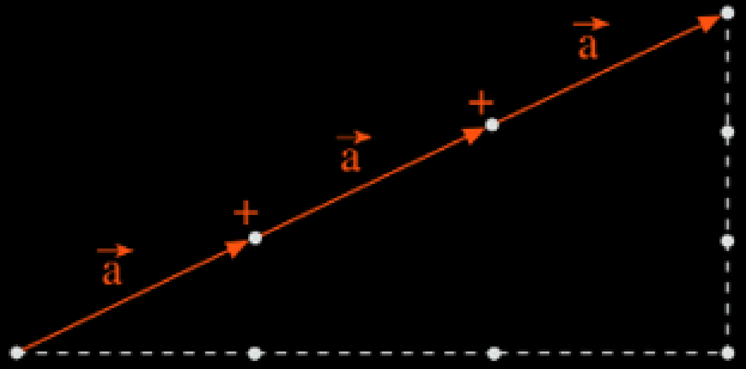
Wie bestimme ich $\mathbf{3} \cdot \vec{a}$ rechnerisch?

Skalar-Multiplikation von Vektoren

!

Skalare Multiplikation

$$s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Distributivgesetz

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$$

Big66

6. Vereinfachen Sie den Term zu einem einzigen Vektor.

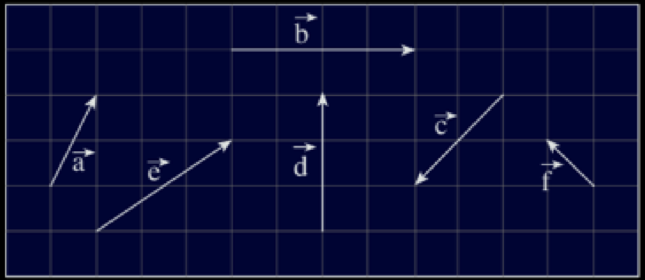
a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$ b) $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. Stellen Sie den gegebenen Vektor in der Form $r\vec{a}$ dar, wobei $\vec{a}$ nur ganzzahlige Koordinaten besitzen soll und r eine reelle Zahl ist.

a) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$

8. Bestimmen Sie das Ergebnis des gegebenen Rechenausdrucks als Spaltenvektor.*

a) $-\vec{a} + \vec{e}$
b) $\vec{d} - \vec{b}$
c) $3\vec{a} + 2\vec{c} + \vec{d}$
d) $2(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{c}) - 2\vec{b}$
e) $\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$
f) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} + 3\vec{f}$



* Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

9. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

a) $3\vec{a} + 5\vec{a} - 7\vec{a} - (-2\vec{a}) - \vec{a}$
b) $\vec{a} - 4(\vec{b} - \vec{a}) - 2\vec{c} + 2(\vec{b} + \vec{c})$
c) $2(\vec{a} + 4(\vec{b} - \vec{a})) + 2(\vec{c} + \vec{a}) - 6\vec{b}$
d) $2(\vec{a} - \vec{c}) + 0{,}5(\vec{c} - \vec{b}) + 1{,}5(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$
e) $-(\vec{a} - 2\vec{b} - (7\vec{a} - (-2) \cdot (-\vec{a}))) - (\vec{a} - (-\vec{b}))$
f) $\vec{c} - (\vec{a} - 2\vec{b} + (7\vec{c} - (4\vec{b} - 2\vec{c})) - 2\vec{c})$
g) $(4\vec{b} - \vec{a} - (-2\vec{b})) \cdot 3 - 3(-4\vec{a} - (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (-1))$
h) $5\vec{b} - (\vec{a} - 4\vec{b} + 3(\vec{a} - 7\vec{b})) \cdot (-2) - 5(-9\vec{b} + 1{,}6\vec{a}$

10. Berechnen Sie den Wert der Variablen x, sofern eine Lösung existiert.

a) $x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

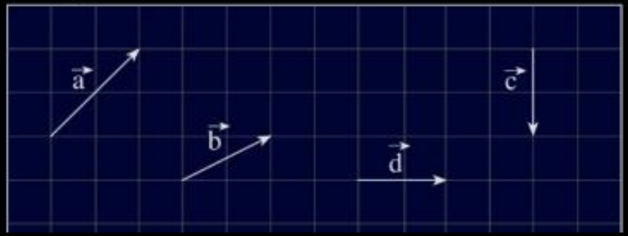
b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ x + 2 \end{pmatrix}$

d) $x \cdot \begin{pmatrix} x + 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x \\ 18 \\ 2x \end{pmatrix}$

11. Prüfen Sie, ob die angegebene Gleichung richtig ist.

a) $\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{d} - 2\vec{c}$
b) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{d} - 3\vec{c}$
c) $\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$
d) $2\vec{d} - (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$
e) $\vec{a} + 2\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{d}$



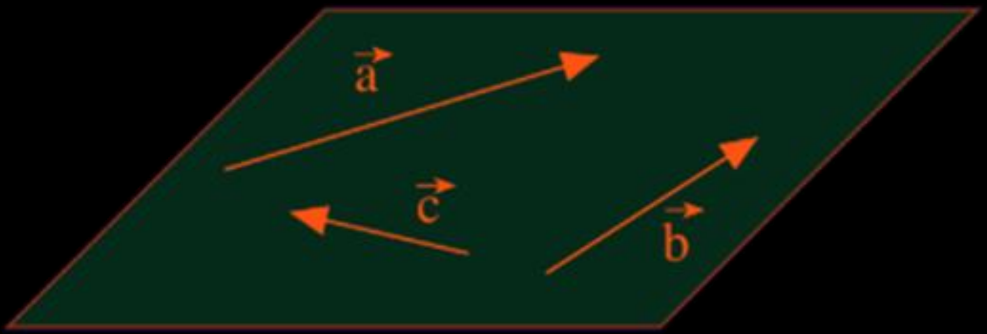
Big66

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = ? \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + ? \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = ? \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + ? \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Linearkombination von Vektoren

Eine Summe der Form $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n$ $(r_i \in \mathbb{R})$ nennt man ***Linearkombination*** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.



$$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Big69

Beispiel: Darstellung eines Vektors als Linearkombination (LK)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{c}$ als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{d}$ **nicht** als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

Übung 16 Linearkombination

Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dargestellt werden können.

Big69

Beispiel: Darstellung eines Vektors als Linearkombination (LK)

Wir versuchen, die Vektoren $\vec{c}$ bzw. $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darzustellen. Dies führt jeweils auf ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen. Wenn es lösbar ist, ist die gesuchte Darstellung gefunden, andernfalls ist sie nicht möglich.

Lösung zu a:

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Gl.-system:
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r + s = 3 \\ \text{II} & r + s = 1 \\ \text{III} & r + 2s = 0 \end{array}$$

Lösungsversuch:
$$\begin{array}{lll} \text{IV} & \text{I} - \text{II}: & r = 2 \\ \text{V} & \text{IV in I}: & s = -1 \end{array}$$

Überprüfung: IV, V in III: $0 = 0$ ist wahr

Ergebnis:

$r = 2,\ s = -1$

$\vec{c}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar: $\vec{c} = 2\,\vec{a} - \vec{b}$.

Lösung zu b:

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Gl.-system:
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r + s = 3 \\ \text{II} & r + s = 1 \\ \text{III} & r + 2s = 2 \end{array}$$

Lösungsversuch:
$$\begin{array}{lll} \text{IV} & \text{I} - \text{II}: & r = 2 \\ \text{V} & \text{IV in I}: & s = -1 \end{array}$$

Überprüfung: IV, V in III: $0 = 2$ ist falsch

Ergebnis:

Das Gleichungssystem ist unlösbar.

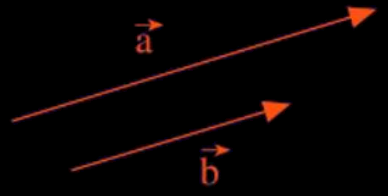
$\vec{d}$ ist **nicht** als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = ? \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = ? \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

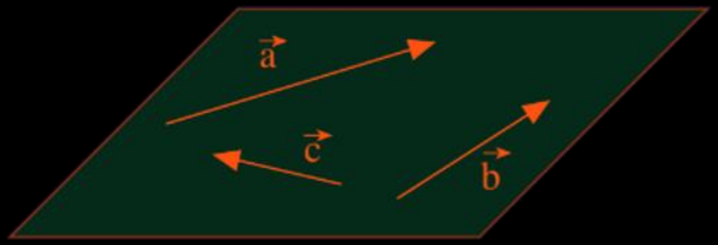
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = ? \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + ? \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kollineare und komplanare Vektoren



Kollineare Vektoren

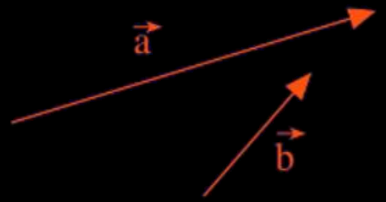
$\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ *oder* $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$



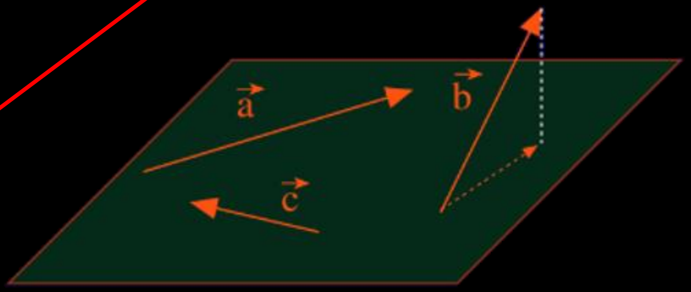
Komplanare Vektoren

$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ *oder* $\vec{b} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$

oder $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$



Nicht kollineare Vektoren



Nicht komplanare Vektoren

$\vec{c} \neq r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ *und* $\vec{b} \neq r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$

und $\vec{a} \neq r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Big70-72

Beispiel: Kollineare Vektoren

a) Prüfen Sie rechnerisch, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$, $\vec{c}$ kollinear sind.

b) Versuchen Sie anschließend, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeichnerisch auf Kollinearität zu überprüfen.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übung 17 Kollinearitätsprüfung

Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren kollinear sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$

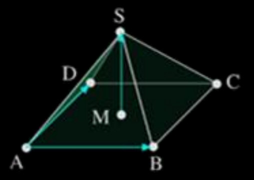
Übung 18 Trapeznachweis

Gegeben sind im räumlichen Koordinatensystem die Punkte A (3|2|−2), B (0|8|1), C (−1|3|3) und D (1|−1|1). Zeigen Sie, dass ABCD ein Trapez ist. Fertigen Sie ein Schrägbild an.
Hinweis: Ein Trapez ABCD ist dadurch gekennzeichnet, dass mindestens ein Paar gegenüberliegender Seiten Parallelität aufweist.

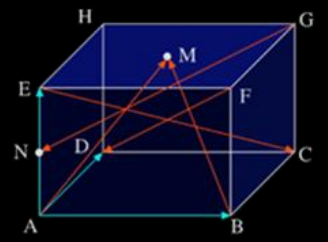
Beispiel: Komplanare Vektoren

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

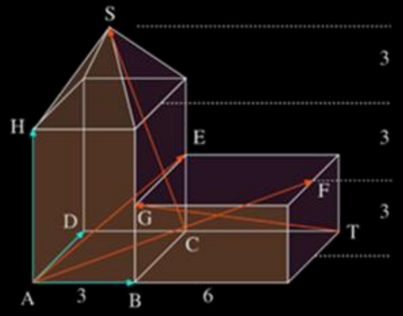
19. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MS}$
a) $\overrightarrow{AS}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{BS}$
c) $\overrightarrow{SC}$ $\quad$ d) $\overrightarrow{BD}$



20. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$
a) $\overrightarrow{AM}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{BM}$
c) $\overrightarrow{GN}$ $\quad$ d) $\overrightarrow{FD}$ bzw. $\overrightarrow{EC}$



21. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AH}$
a) $\overrightarrow{AE}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AF}$
c) $\overrightarrow{HS}$ $\quad$ d) $\overrightarrow{TG}$
F und G sind Seitenmitten.



Big70-72

Beispiel: Kollineare Vektoren

Lösung zu a:
Der rechnerische Kollinearitätsansatz $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ führt auf einen Widerspruch, da r nicht zugleich 2, 1,25 und 1,5 sein kann. Daher sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear.

Der Ansatz $\vec{c} = r \cdot \vec{a}$ führt auf eine Lösung für $r = -0{,}5$. Daher gilt $\vec{c} = -0{,}5 \cdot \vec{a}$.
$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind also kollinear.

Lösung zu b:
Wir zeichnen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein. Beide sehen exakt gleich aus, sind es aber offensichtlich nicht.
Hier wird Gleichheit und damit Kollinearität nur vorgetäuscht.
Es ist also eher ungünstig, Kollinearität im Raum zeichnerisch entscheiden zu wollen.

Kollinearitätsüberprüfung für $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
Ansatz: $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}4 = 2r\\5 = 4r\\3 = 2r\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}r = 2\\r = 1{,}25\\r = 1{,}5\end{matrix}$$

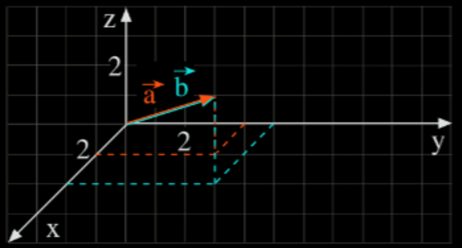
$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ nicht kollinear

Kollinearitätsüberprüfung für $\vec{a}$ und $\vec{c}$:
Ansatz: $\vec{c} = r \cdot \vec{a}$

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}-1 = 2r\\-2 = 4r\\-1 = 2r\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}r = -0{,}5\\r = -0{,}5\\r = -0{,}5\end{matrix}$$

$\Rightarrow \vec{c} = -0{,}5 \cdot \vec{a} \Rightarrow$ kollinear

Versuch der zeichnerischen Lösung



Beispiel: Komplanare Vektoren

Lösung:
Wir wählen einen der drei möglichen Ansätze für Komplanarität:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$.

Der Ansatz führt auf ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem (s. rechts).
Es ist eindeutig lösbar mit den Lösungen $r = 3$ und $s = -1$.

Daher gilt: $\vec{a} = 3 \cdot \vec{b} - \vec{c}$.

Also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar.

Komplanaritätsuntersuchung:

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{lrcl}\text{I} & r + 2s & = & 1\\ \text{II} & 2r - s & = & 7\\ \text{III} & r + s & = & 2\end{array}$$

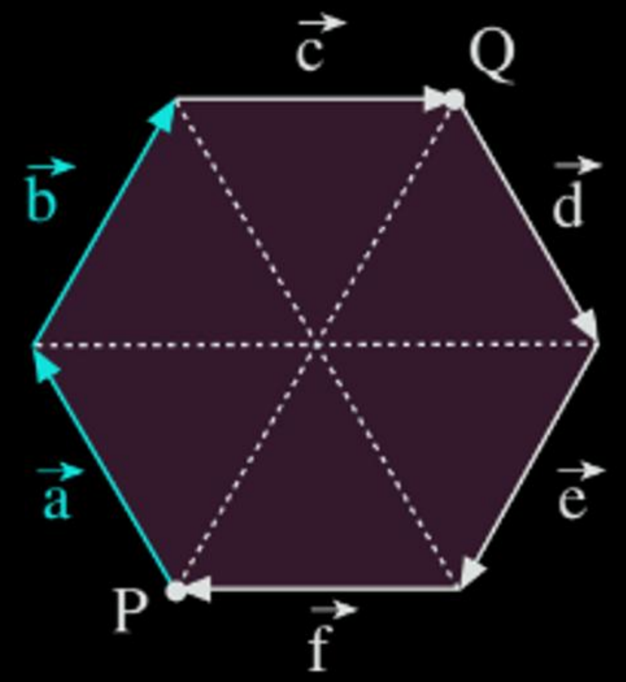
I – III: $s = -1$
in III: $r - 1 = 2 \Rightarrow r = 3$
in II (Probe): $2 \cdot 3 - (-1) = 7$ ist wahr
$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

Big72

22. Rechts ist ein regelmäßiges zweidimensionales Sechseck abgebildet.

a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

b) Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



23. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sowie $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nicht komplanar sind.

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.