Mathematatik Q1 Abels

Kopfübung

- Regeln der Differentialrechnung
- Ganzrationale (und trigonometrische) Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Untersuchung von Exponentialfunktionen
- Wachstums- und Zerfallsprozesse
- Modellierung von Exponentialfunktionen
- Exponentielle Prozesse

Cheatsheet

1. Ableitungs- und Integrationsregeln trigonometrischer und exponentieller Funktionen

Sinusregel	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
Kosinusregel	$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Regeln für exponentielle Funktionen	$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
	$(e^{ax+b})' = a\,e^{ax+b}$	$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$

2. Bedingungen für lokale Extrema und Wendepunkte

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

f sei an der Stelle x_E differenzierbar. Dann gilt:
Ist x_E lokale Extremstelle von f, so gilt $f'(x_E) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema: f''- Kriterium

f sei in einer Umgebung von x_E zweimal differenzierbar. Dann gilt:
Ist $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$, so hat f bei x_E eine lokale Extremstelle.

Genauer: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei x_E
$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei x_E

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema: Vorzeichenwechsel-kriterium

f sei in einer Umgebung von x_E differenzierbar und $f'(x_E) = 0$.
Wechselt f' bei x_E das Vorzeichen, so ist x_E lokale Extremstelle.

Genauer: f' wechselt von + nach – $\Rightarrow$ lokales Maximum bei x_E
f' wechselt von – nach + $\Rightarrow$ lokales Minimum bei x_E

Notwendige Bedingung für Wendepunkte

f sei an der Stelle x_W zweimal differenzierbar. Dann gilt:
Wenn x_W eine Wendestelle von f ist, so gilt $f''(x_W) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte: f'''-Kriterium

f sei in einer Umgebung von x_W dreimal differenzierbar. Dann gilt:
Ist $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, so hat f bei x_W eine Wendestelle.

Genauer: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) < 0 \Rightarrow$ Links-Rechts-WP
$f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) > 0 \Rightarrow$ Rechts-Links-WP

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte: Vorzeichenwechsel-kriterium

f sei in einer Umgebung von x_E zweimal differenzierbar
und es sei $f''(x_W) = 0$.
Wechselt f'' bei x_W das Vorzeichen, so ist x_W eine Wendestelle.

Genauer: f'' wechselt von + nach – $\Rightarrow$ Links-Rechts-WP
f'' wechselt von – nach + $\Rightarrow$ Rechts-Links-WP

3. Stammfunktionen ermitteln

Stammfunktions-nachweis

Ist eine Stammfunktion F von f bekannt oder vorgegeben, so erfolgt der Stammfunktionsnachweis durch Differenzieren, d. h. es wird gezeigt, dass die Ableitung von F gleich f ist ($F' = f$).

Stammfunktion einer exponentiellen Funktion durch Formansatz ermitteln

Die Funktion f sei das Produkt einer ganzrationalen Funktion 1. oder 2. Grades und einer Exponentialfunktion. Dann kann eine Stammfunktion F von f mit dem folgenden Ansatz ermittelt werden.

Funktionsgleichung	**Formansatz für die Stammfunktion**
$f(x) = (ax + b) \cdot e^{kx}$	$F(x) = (Ax + B) \cdot e^{kx}$
$f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{kx}$	$F(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{kx}$

Der Formansatz für F wird differenziert und das Ergebnis mit der Funktion f verglichen (Koeffizientenvergleich).

Die Koeffizienten der Potenzen in den Funktionstermen von F' und f müssen übereinstimmen.
Diese Forderung führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten A, B bzw. A, B, C des Formansatzes.
Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert die passenden Werte für A, B bzw. A, B und C.

4. Exponentielle Wachstumsprozesse

Unbegrenztes Wachstum

Unbegrenztes Wachstum wird durch eine Funktion der Form
$N(t) = a \cdot e^{kt}$ $(a, k > 0)$ beschrieben.
a: Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$; $a = N(0)$

Unbegrenzter Zerfall

Unbegrenzter Zerfall wird durch eine Funktion der Form
$N(t) = a \cdot e^{-kt}$ $(a, k > 0)$ beschrieben.
a: Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$; $a = N(0)$

Begrenztes Wachstum

Begrenztes Wachstum wird durch eine Funktion der Form
$N(t) = a + b \cdot e^{-kt}$ $(k > 0, b < 0)$ beschrieben.
a + b: Anfangsbestand
a: Sättigungsgrenze

Gemischte Übungen

Ganzrat. (und trig.) Funktionen

Big94,95

11. Kurvenuntersuchung

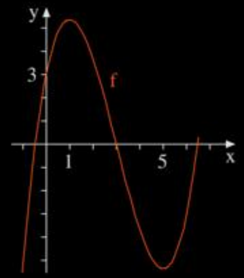
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 3$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 0$.
Welchen Winkel bildet die Tangente t mit der y-Achse?

b) Berechnen Sie die Extrema von f.

c) An welcher Stelle fällt die Funktion f am stärksten? Wie groß ist dort die Steigung von f?

d) Zeigen Sie, dass eine Nullstelle von f bei $x = 3$ liegt. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A, welche vom Graphen von f und den beiden Koordinatenachsen im ersten Quadranten begrenzt wird.



12. Funktionenschar

Von der Funktionenschar $f_a(x) = -x^3 + 3ax^2$ $(a > 0)$ sind rechts die Graphen für $a = 0{,}5$, $a = 1$ und $a = 1{,}2$ abgebildet.

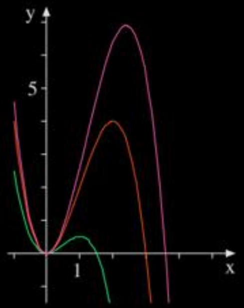
a) Ordnen Sie die Graphen den passenden Parametern zu.

b) Berechnen sie die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Scharkurven in Abhängigkeit vom Parameter a.

c) Für welchen Wert von a ist die Steigung in der rechten Nullstelle von f_a gleich -1?
Wie lauten die Gleichungen der Tangente t und der Normalen n an dieser Stelle?

d) Welche Funktion der Schar hat im Wendepunkt die Steigung 2?

e) Der Graph einer Scharkurve f_a und die x-Achse umschließen eine Fläche A. Für welchen Wert von a hat das Flächenstück A den Inhalt $\frac{4}{3}$?



13. Segelflugzeug

Ein Segelflugzeug ändert seine Flughöhe h mit der Geschwindigkeit $v_1(t) = -0{,}15t^2 + 0{,}9t$ (t in min, v in m/min). Es wird von einem motorisierten Flugzeug nach oben gezogen und ausgeklinkt. Der Segelflug startet zur Zeit $t = 0$ in 80 m Höhe über dem Erdboden.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Höhenfunktion.

b) Welche maximale Flughöhe erreicht das Segelflugzeug?

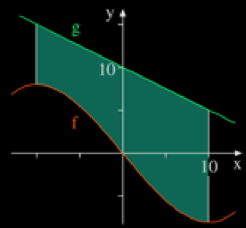
c) Wann ist die Höhenänderung am größten?

d) Wann befindet der Segler sich wieder auf Starthöhe?

e) Nach 14 min leitet der Pilot den Landeanflug ein. In dieser Phase ändert sich die Flughöhe h mit der Geschwindigkeit $v_2(t) = at + b$.
Berechnen Sie, wie groß a und b sein müssen, damit er nach 18 min weich landet.

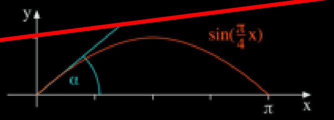
14. Neubausiedlung

Ein Baugrundstück wird durch zwei Straßen f und g und die Parallelen $x = 10$ und $x = -10$ begrenzt (1 LE = 10 m). Die Straße f wird durch die Funktion $f(x) = 0{,}004x^3 - 1{,}2x$ erfasst, die Straße g durch $g(x) = 10 - 0{,}5x$. Berechnen Sie die Größe des Grundstücks auf zwei Wegen, über bestimmte Integrale und ohne Integrale. Vergleichen Sie beide Ansätze.



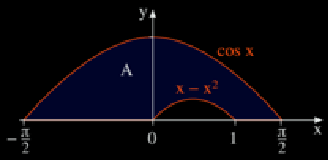
15. Schnittwinkel

Welchen Steigungswinkel besitzt der Graph von $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x)$ bei $x = 0$?



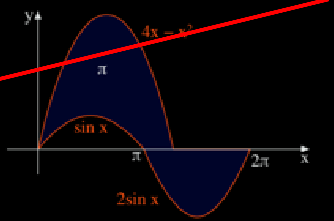
16. Flächenberechnung

Berechnen Sie den Inhalt der abgebildeten Fläche A zwischen dem Graphen der Kosinusfunktion, dem Graphen von $g(x) = x - x^2$ und der x-Achse.



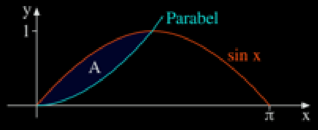
17. Flächenberechnung mit drei Funktionen

Wie groß ist der Inhalt der abgebildeten Fläche A?
A wird von den Graphen der drei Funktionen $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = 4x - x^2$ sowie von der x-Achse begrenzt.



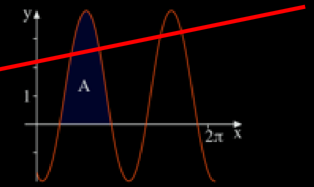
18. Parabel und Sinusfunktion

Eine zur y-Achse achsensymmetrische Parabel läuft durch den ersten Hochpunkt der Sinusfunktion rechts des Ursprungs. Sie umschließt mit dieser eine Fläche A.
Welchen Inhalt besitzt A?



19. Flächenberechnung mit Rechnereinsatz

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sin(2x - 2) + 1$. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die zwischen den beiden kleinsten positiven Nullstellen von f vom Graphen und der x-Achse berandet wird.



Ganzrat. (und trig.) Funktionen

94

11. a) $f'(x) = x^2 - 6x + 5$, $f'(0) = 5$, $f(0) = 3$
$t(x) = 5(x-0) + 3 = 5x + 3$, $\alpha \approx 78{,}7°$
Der Steigungswinkel von t beträgt ca. 78,7°.
Für den Schnittwinkel mit der y-Achse gilt dann $\beta = 90° - \alpha \approx 11{,}3°$.

b) $f''(x) = 2x - 6$, $f'(x) = 0: \begin{cases} x = 1, & f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow H(1 \mid \frac{16}{3}) \\ x = 5, & f''(5) = 4 > 0 \Rightarrow T(5 \mid -\frac{16}{3}) \end{cases}$

c) Im Wendepunkt: $f''(x) = 0$: $x = 3$, $f'(3) = -4$

d) $f(3) = 0$: $A = \int_0^3 f(x)dx = [\frac{1}{12}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x]_0^3 = \frac{45}{4} = 11{,}25$

12. a) Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 3a$: rot für $a = 0{,}5$; blau für $a = 1$ und grün für $a = 1{,}2$
b) Nullstellen: 0 und 3a
$f_a'(x) = -3x^2 + 6ax$, $f_a''(x) = -6x + 6a$, $f_a'''(x) = -6$

Extrema: $f_a'(x) = 0: \begin{cases} x = 0, & f_a''(0) = 6a > 0 \Rightarrow T(0 \mid 0) \\ x = 2a, & f_a''(2a) = -6a < 0 \Rightarrow H(2a \mid 4a^3) \end{cases}$

Wendepunkt: $f_a''(x) = 0$: $x = a$, $f_a'''(a) = -6 < 0 \Rightarrow L - R - WP$ $W(a \mid 2a^3)$

c) $f_a'(3a) = -9a^2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$
$t(x) = -(x-1) = -x + 1$, $n(x) = x - 1$

d) $f_a'(a) = 3a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

e) $A = \int_0^{3a} f_a(x)dx = [-\frac{1}{4}x^4 + ax^3]_0^{3a} = \frac{27}{4}a^4 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

13. a) $h(t) = -0{,}05t^3 + 0{,}45t^2 + 80$
b) $v_1(t) = 0$: $t = 6$, $v_1'(t) = -0{,}3t + 0{,}9$, $v_1'(6) = -0{,}9 < 0 \Rightarrow H(6 \mid 85{,}4)$
Die maximale Flughöhe beträgt 80m + 5,4m = 85,4m.
c) Im Wendepunkt von h: $v_1'(t) = 0$ gilt für $t = 3$; $W(3 \mid 82{,}7)$
In einer Höhe von 82,7m ist die positive Höhenänderung am größten.
d) $h(t) = 80$ gilt für $t = 0$ und $t = 9$
9 Minuten nach dem Start befindet sich der Segler wieder im der Starthöhe von 80m.
e) Ansatz: $h_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$
$h_2(14) = 31$: $98a + 14b + c = 31$
$h_2(18) = 0$: $162a + 18b + c = 0$
$v_2(18) = 0$: $18a + b = 0$ $\Rightarrow$ $v_2(t) = \frac{31}{8}t - \frac{279}{4}$

95

14. I. $A = \int_{-10}^{10} (10 + 0{,}7x - 0{,}004x^3)dx = [10x - 0{,}35x^2 - 0{,}001x^4]_{-10}^{10} = 200$
II. f ist symmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Expon.). Das Flächenstück im 4. Quadranten passt genau in die Lücke im 2. Quadranten, es entsteht ein Trapez. $A = \frac{5+15}{2} \cdot 20 = 200$

95

15. $m = \frac{\pi}{4} = \tan\alpha$, $\alpha = 38{,}15°$

16. $A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_0^1 (x - x^2)dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

17. $A = \int_0^4 (4x - x^2)dx - \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} 2\sin x\,dx\right| = \frac{32}{3} - 2 + 4 = \frac{38}{3}$

18. $H(\frac{\pi}{2} \mid 1)$: $f(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2$
$A = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \frac{4}{\pi^2}x^2)dx = [-\cos x - \frac{4}{3\pi^2}x^3]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6} + 1 = 0{,}4764$

19. Integrationsgrenzen: $f(x) = 0$; $3\sin(2x-2) + 1 = 0$, $\sin(2x-2) = -\frac{1}{3}$
$2x - 2 \approx -0{,}34$, $x \approx 0{,}83 = a$
$2x - 2 = \pi + 0{,}34 \approx 3{,}48$, $x \approx 2{,}74 = b$

Flächeninhalt: $A = \int_{0,83}^{2,74} f(x)dx = [-\frac{3}{2}\cos(2x-2) + x]_{0,83}^{2,74} \approx (4{,}15) - (-0{,}58) = 4{,}73$

Ganzrat. (und trig.) Funktionen II

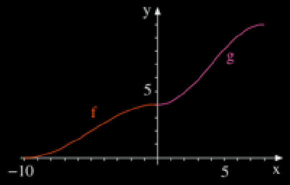
20. Rutschbahn

Eine Rutschbahn im Adventure-Park wird im Querschnitt dargestellt von zwei sinusförmigen Teilen, jeweils auf der Länge einer halben Periode.

a) Entwickeln Sie zwei trigonometrische Funktionen f (für $-10 \le x \le 0$) und g (für $0 \le x \le 8$), die zusammen das Profil der Rutsche beschreiben.

b) Bestimmen Sie das maximale Gefälle auf der Rutsche und das durchschnittliche Gefälle sowie die zugehörigen Neigungswinkel.

c) Eine Firma möchte eine Werbefläche von mindestens $60\,m^2$ mieten. Würde eine seitliche Verkleidung der Rutsche dieser Anforderung genügen?



21. Logo

Gegeben sind $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$ und $g(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 3,\ 0 \le x \le 4.$

a) Welche Perioden besitzen f und g? Bestimmen Sie die Nullstellen von g. Bestimmen Sie die Extrema von f. Zeichnen Sie die Graphen von f und g.

b) Welchen Steigungswinkel hat der Graph von f im Schnittpunkt mit der y-Achse? Wann fällt der Steigungswinkel des Graphen von f erstmals auf 45°?

c) Der von den Graphen von f und g umschlossene Bereich soll als Vorlage für ein Firmenlogo verwendet werden. Bestimmen Sie die Fläche des Logos (Längeneinheit: 1 cm).

d) Jemand behauptet: Die Gerade durch den Hochpunkt des Graphen von f und den Tiefpunkt des Graphen von g halbiert die Fläche des Logos. Untersuchen Sie, ob dies stimmt.

22. Spiegelung und Flächenberechnung

a) Rechts dargestellt ist der Graph einer Funktion $f(x) = a + \cos(bx)$. Geben Sie mögliche Werte für die Parameter an.

b) Wie groß ist die maximale Steigung, wie groß die durchschnittliche Steigung im Intervall $[-3; 0]$?

c) Welche Fläche bildet der Graph von f mit der x-Achse über $[-3; 3]$?

d) Der Graph von f wird an der Parallelen zur x-Achse durch $y = 3$ gespiegelt, wodurch der Graph einer Funktion g entsteht. Zeichnen Sie den Graphen von g und geben Sie die Funktionsgleichung an.

e) Ein Biologe hat einen exotischen Schmetterling vergeblich gejagt. Angenähert wird der Schmetterling mit ausgebreiteten Flügeln durch die Funktionen f und g für $-3 \le x \le 3$ dargestellt. Wie groß ist angenähert die Flügelfläche des Schmetterlings?

23. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + 2\cos x$ für $-4 \le x \le 4$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema und Wendepunkte im angegebenen Intervall.

b) Erstellen Sie eine geeignete Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen für $-4 \le x \le 4$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.

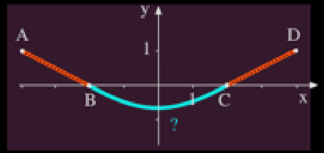
d) Die Koordinatenachsen, der Graph von f und die in c) bestimmte Tangente t begrenzen ein Flächenstück A. Berechnen Sie den Inhalt von A.

e) Die Geschwindigkeit eines Schwimmers im Training wird beschrieben durch die Funktion $v(t) = 1 - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)$, (t in s, v(t) in m/s). Welche Strecke legt er in 2 Minuten zurück?

f) Sei allgemein $f_a(x) = x + a\cos x$. Für welche Werte des Parameters a gibt es waagerechte Tangenten an den Graphen von f_a?

24. Straßenplanung

Die Landstraße verläuft geradlinig durch A(−4|1) zum Punkt B(−2|0). Zwischen B und C(2|0) soll die Straße erneuert werden. Danach verläuft sie wieder geradlinig von C durch Punkt D(4|1).



Der neue Straßenabschnitt zwischen B und C soll im Punkt C „ohne Knick" in den Abschnitt CD übergehen.

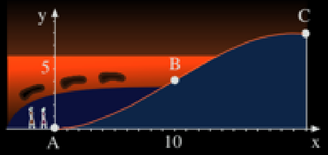
a) Zur Modellierung des Abschnitts BC werden folgende Funktionstypen betrachtet: $f(x) = ax^2 + b,\ g(x) = ae^{-x^2} + b$.
Bestimmen Sie für jeden Funktionstyp die Parameter a und b so, dass die Funktion den Straßenverlauf zwischen den Punkten B und C beschreibt.

b) Begründen Sie, dass Ihre Lösungen auch im Punkt B „ohne Knick" die Straßenstücke verbinden.

c) Zeichnen Sie den Straßenverlauf mit Ihren Lösungen und leiten Sie aus der Zeichnung eine begründete Entscheidung über den besten Straßenverlauf zwischen B und C ab.

25. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.



a) Variante 1:
Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.
Zur Kontrolle: $f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20}(x - 10)\right) + 4$

b) Variante 2:
Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

c) Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

d) Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3:
Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch eine Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch eine Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichungen auf.

f) Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassenteilen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Ganzrat. (und trig.) Funktionen II

97

20. a) Links der y–Achse:
Von $P(-5|2)$ bis $Q(0|4)$ verläuft ein Viertel–Sinusbogen, also ist die Periode 20.
Die Amplitude beträgt 2.

Verschiebung in x–Richtung: –5, in y–Richtung: 2, Resultat: $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{10}(x+5))+2$

Rechts der y–Achse:
Von $R(4|7)$ bis $S(8|10)$ verläuft ein Viertel–Sinusbogen, also ist die Periode 16.
Die Amplitude beträgt 3.

Verschiebung in x–Richtung: 4, in y–Richtung: 7, Resultat: $g(x)=3\sin(\frac{\pi}{8}(x-4))+7$

b) Das maximale Gefälle liegt im rechten Wendepunkt $W(4|7)$.

$g'(x)=\frac{3\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{8}(x-4))$, $g'(4)=\frac{3\pi}{8}\approx 1{,}18$, $\alpha\approx 50°$ $(49{,}7°)$

Durchschnittliches Gefälle: $\frac{\Delta H}{\Delta x}=\frac{10-0}{8-(-10)}=\frac{5}{9}\approx 0{,}56$, $\beta\approx 29{,}1°$

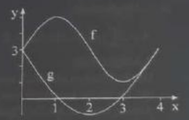
c) $A=\int_{-10}^{0}f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx=20+56=76$ Die seitliche Verkleidung bietet genügend Platz.

98

21. a) Periode von f: $p=4$
Periode von g: $p=8$
Nullstellen von g:

$-4\cdot\sin(\frac{\pi}{4}x)+3=0$, $\sin(\frac{\pi}{4}x)=\frac{3}{4}$

$\frac{\pi}{4}x\approx 0{,}848$, $x_1\approx 1{,}08$, $x_2\approx 2{,}92$



Extrema von f:

$f'(x)=\pi\cdot\cos(\frac{\pi}{2}x)=0$ für $x_1=1$, $x_2=3$

$f''(x)=-\frac{\pi^2}{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)$, $f''(1)=-\frac{\pi^2}{2}$, $f''(3)=\frac{\pi^2}{2}$, $H(1|5)$, $T(3|1)$

b) $f'(0)=\pi$, $\alpha\approx 72{,}34°$

$\alpha=45°$ $\Rightarrow$ $f'(x)=1=\pi\cdot\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $\frac{1}{\pi}=\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $\frac{\pi}{2}x\approx 1{,}247$, $x\approx 0{,}79$

Bei $x=0$ beträgt der Steigungswinkel von f ca. 72,34°. Mit wachsenden x-Werten fällt er und hat bei $x=0{,}79$ erstmals den Wert von 45° erreicht.

c) $A=\int_0^4(f(x)-g(x))dx=[-\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)-\frac{16}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x)]_0^4=\frac{32}{\pi}\approx 10{,}19\text{cm}^2$

d) Hochpunkt von f: $f'(x)=0$: $x=1$, $H(1|5)$
Tiefpunkt von g: $g'(x)=0$: $x=2$, $T(2|-1)$, $h(x)=-6x+11$

$A_1=\int_0^1(f(x)-g(x))dx+\int_1^2(h(x)-g(x))dx$
$=[-\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)-\frac{16}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x)]_0^1+[-3x^2+8x-\frac{16}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x)]_1^2\approx 2{,}76+2{,}60=5{,}36$

$A_2=\int_1^2(f(x)-h(x))dx+\int_2^4(f(x)-g(x))dx$
$=[-\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)-8x+3x^2]_1^2+[-\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)-\frac{16}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x)]_2^4\approx 2{,}27+2{,}55=4{,}82$

Probe: $A_1+A_2=10{,}18$; Resultat: Die Gerade h halbiert die Logofläche nicht.

22. a) Hebung um 1, Periode 6, also $a=1$, $b=\frac{\pi}{3}$, $f(x)=1+\cos(\frac{\pi}{3}x)$

b) Die größte Steigung ist im Wendepunkt.

$f'(x)=-\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}x)$, $f''(x)=-\frac{\pi^2}{9}\cos(\frac{\pi}{3}x)$

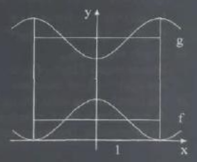
$f''(x)=0$: $x=-1{,}5$, $f'(-1{,}5)=\frac{\pi}{3}\approx 1{,}05$

Die maximale Steigung beträgt ca. 1,05.

Durchschnittliche Steigung: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2-0}{3}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$

c) $A=2\int_0^3 f(x)dx=2[\frac{3}{\pi}\sin(\frac{\pi}{3}x)+x]_0^3=6$

d) $g(x)=-\cos(\frac{\pi}{3}x)+5$



98

e) 1. Möglichkeit:

$A=2\int_0^3(g(x)-f(x))dx=2[-\frac{6}{\pi}\sin(\frac{\pi}{3}x)+4x]_0^3=24$

2. Möglichkeit:
Die Teilflächen oberhalb von $y=5$ ergeben exakt
die Teilfläche unterhalb von $y=5$.
Analog ergeben die Teilflächen unterhalb von $y=1$ die Teilfläche oberhalb von $y=1$.
Das so entstandene Rechteck hat den Inhalt $A=6\cdot 4=24$.

23. a) $f'(x)=1-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$, $f'''(x)=2\sin x$

Extrema: $f'(x)=0$: $x_1\approx 0{,}52$, $x_2=\pi-x_1\approx 2{,}62$

$f''(0{,}52)\approx -1{,}74<0$, $H(0{,}52|2{,}26)$, $f''(2{,}62)\approx 1{,}73>0$, $T(2{,}62|0{,}89)$

Wendepunkte: $f''(x)=0$: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}\pi$

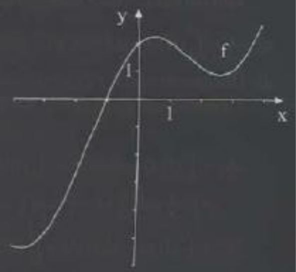
$f'''(\frac{\pi}{2})=2\neq 0$, $W_1(\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2})$, $f'''(-\frac{1}{2}\pi)=-2\neq 0$, $W_2(-\frac{1}{2}\pi|-\frac{1}{2}\pi)$

c) Ansatz: $t(x)=mx+n$, $m=f'(\frac{\pi}{2})=-1$

Punktprobe mit $P(\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2})$:

$\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+n$, $n=\pi$, $t(x)=-x+\pi$

b)



d) $A=\int_0^{\pi/2}f(x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}t(x)dx$
$=[\frac{1}{2}x^2+2\sin x]_0^{\pi/2}+[-\frac{1}{2}x^2+\pi x]_{\pi/2}^{\pi}$
$=2+\frac{\pi^2}{4}\approx 4{,}47$

e) $s=\int_0^{120}v(t)dt=[t+\frac{15}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{30}t)]_0^{120}=120$

f) $f_a'(x)=1-a\sin x$, $f_a'(x)=0$: $-1\leq\sin x=\frac{1}{a}\leq 1$ gilt für $|a|\geq 1$

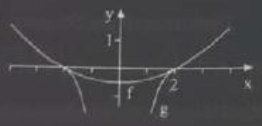
99

24. a) $f(x)=ax^2+b$, $f'(x)=2ax$
I. $f(2)=0$: $0=4a+b$
II. $f'(2)=0{,}5$: $0{,}5=4a$, $a=\frac{1}{8}$, $b=-0{,}5$, $f(x)=\frac{1}{8}x^2-0{,}5$

$g(x)=a\cdot e^{-x^2}+b$, $g'(x)=-2ax\cdot e^{-x^2}$
I. $g(2)=0$: $0=ae^{-4}+b$
II. $g'(2)=0{,}5$: $0{,}5=-4ae^{-4}$, $a=-\frac{e^4}{8}$, $b=\frac{1}{8}$, $g(x)=\frac{1}{8}(1-e^{4-x^2})$

b) Es gilt: $m_{AB}=-m_{CD}$
Dies ist wegen $f'(x)=-f'(-x)$
und $g'(x)=-g'(-x)$ gesichert.

c) Die Entscheidung sollte für die Variante f fallen,
da das fehlende Stück zwischen B und C dann
am kürzesten ist. Das minimiert den Materialbedarf.



99

25. a) $f(x)=4\cdot\sin(\frac{\pi}{20}(x-10))+4$

b) $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g'(x)=3ax^2+2bx+c$
I. $g(0)=0$: $d=0$
II. $g'(0)=0$: $c=0$
III. $g(20)=8$: $8=8000a+400b$
IV. $g'(20)=0$: $0=1200a+40b$, $8=-4000a$, $a=-\frac{1}{500}$, $b=\frac{3}{50}$
$g(x)=-\frac{1}{500}x^3+\frac{3}{50}x^2$

c) Der stärkste Anstieg ist jeweils im Wendepunkt.

$f'(x)=\frac{4\pi}{20}\cdot\cos(\frac{\pi}{20}(x-10))$, $f''(x)=-\frac{\pi^2}{100}\cdot\sin(\frac{\pi}{20}(x-10))$

$f''(x)=0$: $\sin(\frac{\pi}{20}(x-10))$, $x=10$, $f'(10)=\frac{4\pi}{20}\approx 0{,}63$

$g'(x)=-\frac{3}{500}x^2+\frac{6}{50}x$, $g''(x)=-\frac{6}{500}x+\frac{6}{50}$, $g''(x)=0$, $x=10$, $g'(10)=0{,}6$

d) Berechnung der Querschnittsflächen:

$A_f=\int_0^{20}f(x)dx=[-\frac{80}{\pi}\cos(\frac{\pi}{20}(x-10))+4x]_0^{20}=80$

alternativ: Fläche längs $y=4$ zerschneiden und zu einem Rechteck zusammenfügen.
Dann gilt $A_f=20\cdot 4=80$

$A_g=\int_0^{20}g(x)dx=[-\frac{1}{2000}x^4+\frac{1}{50}x^3]_0^{20}=80$

Der Sandbedarf ist in beiden Fällen gleich groß.

e) $h_1(x)=e^{ax}-b$
I. $h_1(0)=0$: $0=1-b$, $b=1$
II. $h_1(10)=4$: $4=e^{10a}-1$, $a=\frac{\ln 5}{10}\approx 0{,}16$, $h_1(x)=e^{0{,}16x}+1$

$h_2(x)=10-c\cdot e^{-dx}$

I. $h_2(10)=4$ $4=10-c\cdot e^{-10d}$, $c=6\cdot e^{10d}$

II. $h_2(20)=8$ $8=10-c\cdot e^{-20d}$, $8=10-6\cdot e^{-10d}$, $d=\frac{\ln\frac{1}{3}}{-10}\approx 0{,}11$, $c\approx 18$

$h_2(x)=10-18\cdot e^{-0{,}11x}$

f) $h_1'(x)=0{,}16\cdot e^{0{,}16x}$, $h_2'(x)=1{,}98\cdot e^{-0{,}11x}$
$h_1'(0)=0{,}16$, $\alpha\approx 9{,}1°$

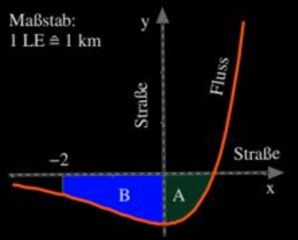
$$\left.\begin{array}{l} h_1'(10)=0{,}16\cdot e^{1{,}6}\approx 0{,}79,\quad \alpha_1\approx 38{,}4° \\ h_2'(10)=1{,}98\cdot e^{-1{,}1}\approx 0{,}66,\quad \alpha_2\approx 33{,}4° \end{array}\right\}\ \alpha\approx 5°$$

$h_2'(20)=1{,}98\cdot e^{-2{,}2}\approx 0{,}22$, $\alpha\approx 12{,}4°$

Die Bedingung ist in den Punkten A und B erfüllt aber nicht im Punkt C.

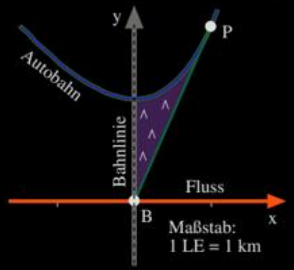
Untersuchung von Exponentialfunktionen

1. Kurvendiskussion
Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-1)\cdot e^x$.
a) Bestimmen Sie die Ableitungen f', f'' und f'''.
b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen.
c) Die Funktion f besitzt ein Extremum und einen Wendepunkt. Wo liegen diese Punkte?
d) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to \infty$ mit einer Tabelle.
e) Skizzieren Sie den Graphen von $f(-3 \le x \le 2)$.



2. Flächeninhalt
Die Funktion $f(x) = (x-1)\cdot e^x$ (s. Bild oben) beschreibt den Verlauf eines Flusses, der von zwei Straßen überbrückt wird, die längs der Koordinatenachsen laufen. (1 LE = 1 km)
Die beiden Straßen und der Fluss schließen im 4. Quadranten ein Grundstück A ein, welches für 80 € pro m² zum Kauf angeboten wird.
a) Zeigen Sie, dass $F(x) = (x-2)\cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.
b) Berechnen Sie den Verkaufspreis für das Grundstück A.
c) Wie groß ist das im 3. Quadranten liegende Grundstück B, welches durch die Straßen, den Fluss und den Fußweg bei $x = -2$ begrenzt wird?

3. Tangenten
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - x$. Sie beschreibt den Verlauf einer Autobahn. (1 LE = 1 km)
a) Besitzt f Extrem- und Wendepunkte?
b) Schließen Sie aus den Ergebnissen, dass f keine Nullstellen besitzt.
c) Vom Bahnhof B(0|0) führt ein Zubringer zum Punkt P(1|f(1)) der Autobahn. Zeigen Sie, dass dieser Zubringer tangential in die Autobahn mündet.
Wie lange benötigt ein 30 km/h schneller Transporter vom Bahnhof bis zur Autobahn?
d) Wie viel Hektar Fläche hat das Grundstück zwischen Straße, Zubringer und Bahnlinie?
(1 Hektar = 10 000 m²)



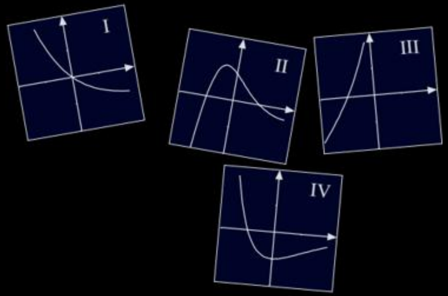
4. Kurvenuntersuchung
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x\cdot e^{x+1}$.
a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \le x \le 0{,}5$.
c) Der Ursprung wird mit dem Punkt $P(-1|f(-1))$ durch eine Strecke s verbunden.
Wie groß ist das Flächenstück zwischen Kurve f und Strecke s?
(*Hinweis:* Bestimmen Sie mit dem Formansatz $F(x) = (ax+b)\cdot e^{x+1}$ eine Stammfunktion von f.)
Wie lang ist die Strecke s?

5. Kurvendiskussionen
Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Überprüfen Sie hierzu f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Untersuchen Sie, wie f sich für $x \to \pm\infty$ verhält. Skizzieren Sie den Graphen von f in einem sinnvollen Bereich. Überprüfen Sie Ihre Skizze mit dem TR/Computer.
a) $f(x) = (2x+2)\cdot e^{-0{,}5x}$ b) $f(x) = (1-x)\cdot e^{2-x}$ c) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$

6. Graph und Funktionsterm
Ordnen Sie jedem Funktionsterm den passenden Graphen zu. Begründen Sie.

$f(x) = e^{-x} - 1$
$g(x) = x + e^{x+1}$
$h(x) = (1-x^2)e^{-x}$
$k(x) = -(1+x)e^{-x}$

⇔



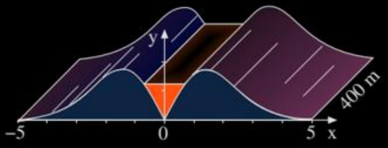
7. Funktion und Stammfunktion
Ordnen Sie jeder Funktion f die passende Stammfunktion F zu. Führen Sie den Nachweis.

A: $f(x) = x - e^{2x}$
B: $f(x) = x\cdot e^{2x}$
C: $f(x) = (1-2x)e^{-2x}$
D: $f(x) = 1 + 2e^{-2x}$

⇕

I: $F(x) = xe^{-2x}$
II: $F(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5e^{2x}$
III: $F(x) = (0{,}5x - 0{,}25)e^{2x}$
IV: $F(x) = x - e^{-2x}$

8. Kanalprofil
Das Querschnittsprofil eines 400 m langen Kanals kann durch die Funktion $f(x) = 2x e^{-0{,}25x^2}$ modelliert werden.
($0 \le x \le 5$, 1 LE = 1 m)
a) Wie hoch ist die Dammkrone?
Wie breit ist die Wasserrinne?

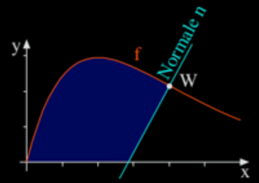


b) Zeigen Sie durch Ableiten, dass $F(x) = -4e^{-0{,}25x^2}$ eine Stammfunktion von f ist.
Verwenden Sie die allgemeine Kettenregel von S. 84.
c) Berechnen Sie das maximale Fassungsvermögen des Kanals.
d) Der städtische Hangrasenmäher hat eine maximale Steigfähigkeit von 40°. Kann der Hang des Dammes damit bis zur Dammkrone befahren werden?

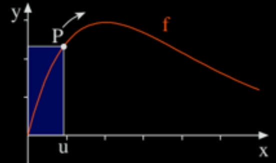
9. Kurvendiskussion
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x\cdot e^{-0{,}5x}$.
a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Wie verhält sich f für $x \to \pm\infty$?
b) Bestimmen Sie den Extremalpunkt und den Wendepunkt von f. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von f.
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t von f. $\left(\text{Kontrolle: } t(x) = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}\right)$
d) Zeichnen Sie die Graphen von f und t für $-1 \le x \le 8$.

10. Kurvenuntersuchung
Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^{0{,}5x}$ und $g(x) = e^{1{,}5-0{,}25x}$.
a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in einem Koordinatensystem für $-2 \le x \le 4$.
b) Bestimmen Sie die Ableitungen f' und g'.
c) Wo schneiden sich die Graphen von f und g? Wie groß ist ihr Schnittwinkel?
d) Eine Ursprungsgerade h berührt den Graphen von f als Tangente. Wo liegt der Berührpunkt von f und h? Wie lautet die Gleichung von h?
e) Wie groß ist die Fläche A, welche von f und g und der y-Achse umschlossen wird?

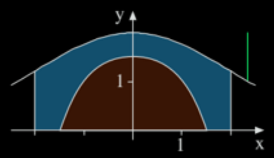
11. Flächeninhalt
Die Abbildung rechts zeigt den Graphen von $f(x) = 4xe^{-0{,}5x}$.
Die Normale n im Wendepunkt $W\left(4\middle|\frac{16}{e^2}\right)$ hat die Gleichung $n(x) = \frac{e^2}{4}x - e^2 + \frac{16}{e^2}$.
a) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-8x-16)e^{-0{,}5x}$ eine Stammfunktion von f ist.
b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



12. Extremalproblem
Auf dem Graphen von $f(x) = 4x\cdot e^{-0{,}5x}$ wandert der Punkt $P(u|f(u))$, $u > 0$.
Wie muss u gewählt werden, damit der Inhalt des markierten achsenparallelen Rechtecks maximal wird?
Was passiert, wenn u gegen ∞ strebt?



13. Fledermausgaube
Die Abbildung zeigt eine Fledermausgaube, die 4 m breit ist. Das obere Randprofil wird durch die Funktion $f(x) = 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$ für $-2 \le x \le 2$ modelliert.
a) Wie hoch ist die Gaube an ihrer höchsten Stelle?
b) An welchen Stellen ist das Profil am steilsten? Wie groß ist dort der Steigungswinkel?



c) Die Gaube besitzt ein parabelförmiges Fenster. Es ist 3 m breit und 1,5 m hoch.
Wie lautet die Gleichung der Fensterparabel? Wie groß ist die Glasfläche?
d) Am Gaubenrand soll eine Antenne (im Bild rot) von 1 m Höhe stehen. Sie soll die Gaubenspitze nicht überragen. In welchem Bereich kann sie aufgestellt werden?

Untersuchung von Exponentialfunktionen

112

1\. a) $f'(x) = xe^x$, $f''(x) = (1+x)e^x$, $f'''(x) = (2+x)e^x$

b) Nullstelle ist $x = 1$

c) Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $T(0|-1)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = -1$, $f'''(-1) = e^{-1} \neq 0$, $W(-1|-2e^{-1})$

d) $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$

e) Graph siehe Aufgabe

2\. a) $F'(x) = (x-1)e^x = f(x)$

b) $A = -(F(1)-F(0)) = -(-e+2) \approx 0{,}718282\ km^2 = 718282\ m^2$

Verkaufspreis: 57462560 Euro

c) $B = -(F(0)-F(-2)) = -(-2+4e^{-2}) \approx 1458659\ m^2$

3\. a) $f'(x) = e^x - 1$, $f''(x) = e^x$

Extrema: $f'(x) = 0$ für $x = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $T(0|1)$

Wendepunkt: $f''(x) \neq 0$, kein Wendepunkt

b) Da der Tiefpunkt bei $y = 1 > 0$ liegt und kein Wendepunkt existiert, kann f keine Nullstellen besitzen.

c) $P(1|e-1)$, $z(x) = (e-1)x$, $f'(1) = e - 1$: z mündet tangential in die Autobahn.

$|BP| = \sqrt{1+(e-1)^2} \approx 2\ km$

In 60 min werden 30 km zurückgelegt, also braucht man für 2 km 4 Minuten.

d) $A = \int_0^1 (f(x)-z(x))dx = \int_0^1 (e^x - ex)dx = [e^x - \frac{e}{2}x^2]_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 \approx 0{,}359\ km^2 \approx 36\ ha$

4\. a) Nullstelle: $x = 0$

Extrema: $f'(x) = (1+x)e^{x+1}$, $f''(x) = (2+x)e^{x+1}$

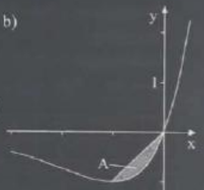
$f'''(x) = (3+x)e^{x+1}$

$f'(x) = 0$ für $x = -1$, $f''(-1) = 1 > 0$, $T(-1|-1)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = -2$, $f'''(-2) = e^{-1} \neq 0$

$W(-2|-0{,}74)$

b)



112

c) $P(-1|-1)$: $s(x) = x$;

$F(x) = (ax+b)e^{x+1}$, $F'(x) = (ax+b+a)e^{x+1}$, $a = 1$, $b = -1$, $F(x) = (x-1)e^{x+1}$

Größe des Flächenstücks:

$$A = \int_{-1}^{0} (s(x)-f(x))dx = \int_{-1}^{0} (x - xe^{x+1})dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - (x-1)e^{x+1}]_{-1}^{0} = e - \tfrac{1}{2} - 2 \approx 0{,}22$$

Streckenlänge: $l = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

114

5\. a) Nullstelle: $x = -1$

$f'(x) = (1-x)e^{-0{,}5x}$, $f''(x) = (-1{,}5+0{,}5x)e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = (1{,}25-0{,}25x)e^{-0{,}5x}$

Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 1$, $f''(1) = -e^{-0{,}5} < 0$

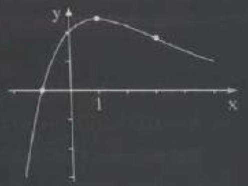
$H(1|4e^{-0{,}5}) = H(1|2{,}43)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 3$, $f'''(3) \neq 0$

$W(3|8e^{-1{,}5}) = W(3|1{,}79)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to 0$



b) Nullstelle: $x = 1$

$f'(x) = (x-2)e^{2-x}$, $f''(x) = (3-x)e^{2-x}$

$f'''(x) = (x-4)e^{2-x}$

Extremum: $f'(x) = 0$ für $x = 2$, $f''(2) = 1 > 0$

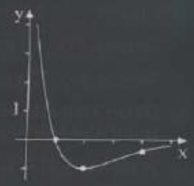
$T(2|-1)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 3$, $f'''(3) = -e^{-1} \neq 0$

$W(3|-2e^{-1}) = W(3|0{,}74)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to 0$



c) Nullstelle: $e^{2x} = 2$, $x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$

$f'(x) = e^x + 2e^{-x}$, $f''(x) = e^x - 2e^{-x}$

$f'''(x) = e^x + 2e^{-x}$

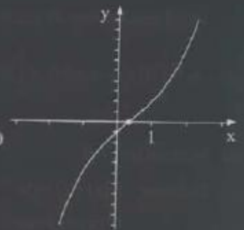
Extrema: keine

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$, $f'''(0{,}35) \neq 0$

$W(0{,}35|0)$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$, $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$



6\.

I	II	III	IV
f	h	g	k

Untersuchung der Nullstellen

7\.

I	II	III	IV
C	A	B	D

114

8\. a) $f'(x) = (2-x^2)e^{-0{,}25x^2}$, $f'(x) = 0$ für $x = \pm\sqrt{2}$

Höhe der Dammkrone: $h = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\,e^{-0{,}5} \approx 1{,}72\ m$

Breite der Rinne: $2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ m$

b) $F'(x) = 2x\,e^{-0{,}25x^2} = f(x)$

c) $A = 2\int_0^{\sqrt{2}} (1{,}72 - f(x))dx = 2[1{,}72x + 4e^{-0{,}25x^2}]_0^{\sqrt{2}} \approx 1{,}72\ m^2$

$V = 400 \cdot A \approx 688\ m^3$

d) $\tan 40° \approx 0{,}84$

Im Wendepunkt ist der Damm am steilsten. $f''(x) = (0{,}5x^3-3x)e^{-0{,}25x^2}$

$f''(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = \sqrt{6}$, $f'(\sqrt{6}) = -4e^{-1{,}5} \approx -0{,}89$

Der Rasenmäher kommt nicht über die Wendepunktlinie hinauf.

115

9\. a) Nullstelle: $x = 0$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(x) = (4-2x)e^{-0{,}5x}$ Extrema: $H(2|2{,}94)$

$f''(x) = (x-4)e^{-0{,}5x}$ Wendepunkte: $(4|2{,}17)$

$f'''(x) = (3-0{,}5x)e^{-0{,}5x}$

f ist streng monoton steigend für $x < 2$

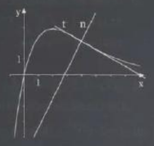
und streng monoton fallend für $x > 2$.

f ist für $x < 4$ rechts- und für $x > 4$ linksgekrümmt.

c) $t(x) = mx+n$, $m = f'(4) = -\frac{4}{e^2}$

$t(x) = -\frac{4}{e^2}(x-4) + \frac{16}{e^2} = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$

d)



10\. b) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $g'(x) = -\frac{1}{4}e^{1{,}5-\frac{x}{4}}$

c) Schnittpunkt: $f = g$: $e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{3}{2}-\frac{x}{4}}$ | ln

$\frac{x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{x}{4}$, $x = 2$, $S(2|e)$

$\tan\alpha = f'(2) = \frac{1}{2}e \Rightarrow \alpha \approx 53{,}66°$

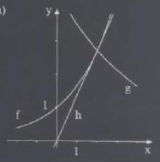
$\tan\beta = g'(2) = -\frac{1}{4}e \Rightarrow \beta \approx -34{,}20°$

Schnittwinkel: $\gamma = \alpha + |\beta| \approx 87{,}86°$

d) $h(x) = mx$, I. $mx = e^{\frac{x}{2}}$

II. $m = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $B(2|e)$, $h(x) = \frac{e}{2} \cdot x$

a)



115

c) $A = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = [-4e^{\frac{3}{2}-\frac{x}{4}} - 2e^{\frac{x}{2}}]_0^2 = -4e - 2e + 4e^{\frac{3}{2}} + 2 \approx 3{,}62$

11\. a) $F'(x) = (4x+8-8)e^{-0{,}5x} = f(x)$

b) Nullstelle von n: $x = (e^2 - \frac{16}{e^2}) \cdot \frac{4}{e^2} = \frac{e^4-16}{e^4} \cdot 4 = 4 - \frac{64}{e^4} \approx 2{,}83$

$$A = \int_0^4 f(x)dx - \int_{4-\frac{64}{e^4}}^{4} n(x)dx = [(-8x-16)e^{-0{,}5x}]_0^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{e^4} \cdot \frac{16}{e^2} = -\frac{48}{e^2} + 16 - \frac{512}{e^6} \approx 8{,}23$$

12\. $A(u) = u \cdot f(u) = 4u^2 \cdot e^{-0{,}5u}$, $A'(u) = (8u - 2u^2) \cdot e^{-0{,}5u}$, $A'(u) = 0$ für $u = 4$ und $u = 0$

$A''(u) = (u^2 - 8u + 8) \cdot e^{-0{,}5u}$, $A''(0) = 8 > 0$, $A''(4) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$u \to \infty$: $A(u) \to 0$

13\. a) $h = f(0) = 2$

b) In den Wendepunkten ist das Profil am steilsten.

$f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$, $f''(x) = (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$, $f''(x) = 0$: $x = \pm 2$

$f'(2) = -e^{-0{,}5} = \tan\alpha$, $\alpha \approx 148{,}76°$, $f'(-2) = e^{-0{,}5} = \tan\beta$, $\beta \approx 31{,}23°$

c) $g(x) = 1{,}5 - \frac{1}{1{,}5} \cdot x^2 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$, $A = 2\int_0^{1{,}5} g(x)dx = 2[\frac{3}{2}x - \frac{2}{9}x^3]_0^{1{,}5} = 3$

Die Glasfläche beträgt 3 m^2.

d) $1 = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$, $\ln 0{,}5 = -\frac{1}{8}x^2$, $x_{1/2} = \pm\sqrt{-8\ln 0{,}5} \approx \pm 2{,}35$

Die Antenne muss rechts oder links von der Gaubenmitte mindestens den Abstand 2,35m haben.

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Unbegrenzt

Big121,122

Übung 1 Abnahmeprozess

Während einer Konjunkturflaute sinkt der Absatz eines Autoherstellers im Verlauf von 6 Monaten von 27 000 Autos pro Monat auf 20 000 Autos pro Monat.

a) Wie lautet die Abnahmefunktion, wenn der Rückgang dem exponentiellen Modell $f(t) = a \cdot e^{-kt}$ folgt?
(t: Zeit in Monaten; f(t): Anzahl der monatlich abgesetzten Autos).

b) Wann hat sich der Absatz halbiert?

c) Um wie viele Autos sinkt der Absatz im Verlauf des 6. Monats?

2. Ameisenkolonie

Eine Ameisenkolonie von 10 000 Tieren wächst jährlich um 10%. Wie lautet die Wachstumsfunktion? Wann ist eine Bevölkerung von 1 Million erreicht?

3. Radioaktivität

Eine Probe des radioaktiven Isotops Actinium 225 zerfällt gemäß dem Gesetz $N(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}069t}$ (t: Zeit in Tagen; N(t): Rad. Substanz in mg).

a) Wie groß ist der Anfangsbestand? Wie groß ist der Bestand nach einem Tag? Welcher prozentuale Anteil der Probe zerfällt täglich?

b) Wie groß ist die Halbwertszeit? Eine Probe wird als ausgebrannt betrachtet, wenn die Strahlung auf 1% des Ausgangswerts gefallen ist. Schätzen Sie die Zeit hierfür mit Hilfe der Halbwertszeit ab.

4. Städte

Die Einwohnerzahl einer Stadt wird modellhaft beschrieben durch $N_1(t) = 30000 \cdot e^{-0{,}0513t}$. Dabei ist t die Zeit in Jahren und $N_1(t)$ die Einwohnerzahl zum Zeitpunkt t.

a) Welche Einwohnerzahl liegt nach fünf Jahren vor?

b) Wann fällt die Einwohnerzahl auf 20 000 Einwohner?

c) Wie groß ist die momentane Abnahmerate zu Beginn des Prozesses bzw. nach 10 Jahren?

d) Die Einwohnerzahl einer anderen Stadt wird beschrieben durch $N_2(t) = 10000 \cdot e^{0{,}09531t}$. Wann sind beide Städte gleich groß? Wie groß sind sie dann?

e) Wann ist die Summe der Einwohnerzahlen beider Städte minimal?

5. Blutalkohol

Ein Zecher hat sich um 24^{00} Uhr einen Alkoholspiegel von 1,8 Promille angetrunken. Nach einer linearen Faustformel werden stündlich 0,2 Promille abgebaut. Ein anderes exponentielles Modell geht davon aus, dass stündlich ca. 20% des aktuellen Gehaltes abgebaut werden.

a) Stellen Sie für das lineare Modell eine Abnahmefunktion a(t) auf.

b) Weisen Sie nach, dass das zweite exponentielle Modell durch die Funktion $b(t) = 1{,}8 \cdot e^{-0{,}2231t}$ erfasst wird. Zeichnen Sie beide Graphen in ein System.

c) Welchen Alkoholspiegel hat der Mann morgens um 6.00 Uhr nach dem linearen Modell? Darf er nun wieder fahren (Die erlaubte Grenze beträgt 0,5 Promille)?

d) Wann wird die Grenze von 0,5 Promille nach dem exponentiellen Modell erreicht?

e) Zu welchem Zeitpunkt ist der Unterschied zwischen den Modellen maximal?

f) Bestimmen Sie graphisch, durch Probieren oder mit einem Näherungsverfahren, zu welchem Zeitpunkt beide Modelle ungefähr den gleichen Alkoholspiegel anzeigen.

6. Luftdruck

Auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck p 1013 mbar. Die Funktion p erfüllt die Gleichung $p'(h) = -0{,}00013 \cdot p(h)$. h: Höhe in m, p: Luftdruck in mbar.

a) Begründen Sie, dass $p(h) = 1013e^{-0{,}00013h}$ die Abnahmefunktion ist.

b) Wie groß ist der Luftdruck in 2000 m Höhe bzw. auf dem Mount Everest?

c) Untrainierte Menschen benötigen ab 500 mbar Luftdruck eine Sauerstoffzufuhr per Maske. Ab welcher Höhe ist dies erforderlich?

Wachstums- und Zerfallsprozesse I

121

1. a) $f(0) = 27000$: $a = 27000$, $f(6) = 20000$: $k = \frac{\ln\frac{20}{27}}{-6} \approx 0{,}05$

   Resultat: $f(t) = 27000 \cdot e^{-0{,}05t}$

   b) $f(t) = 13500$: $t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}05} \approx 13{,}86$: Nach ca. 13,86 Monaten.

   c) $f(5) - f(6) \approx 21028 - 20000 = 1028$: Er sinkt um 1028 Autos.

122

2. $N(t) = c \cdot a^t = 10000 \cdot 1{,}1^t = 10000 \cdot e^{\ln 1{,}1 \cdot t} \approx 10000 \cdot e^{0{,}0953t}$

   $10000 \cdot e^{0{,}0953t} = 1000000$: $t = \frac{\ln 100}{0{,}0953} \approx 48{,}32$

   Nach ca. 48,32 Jahren wird die Millionengrenze erreicht.

3. a) Anfangsbestand: $N_0 = 1000$

   Bestand nach einem Tag: $N(1) \approx 933{,}33\text{mg}$

   täglicher Zerfall: $\frac{66{,}67}{1000} \approx 6{,}67\%$

   b) Halbwertszeit: $T = \frac{\ln 2}{k} = 10{,}05$ ca. 10 Tage

   Ausgangswert zu Beginn: 1000mg, 1% davon sind 10mg

   Nach n-maliger Halbwertszeit gilt $\frac{1000}{2^n} = 10$, $n = \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6{,}64$

   Die Probe ist nach ca. 66 Tagen ausgebrannt. Probe: $1000 \cdot e^{-0{,}069 \cdot 66} \approx 10{,}5$

   Alternativ: $10 = 1000 \cdot e^{-0{,}069t}$, $t \approx 66{,}7$

4. a) $N_1(5) \approx 23213$ Einwohner

   b) $N_1(t) = 30000 \cdot e^{-0{,}0513t} = 20000$, $t = \frac{\ln\frac{2}{3}}{-0{,}0513} \approx 7{,}904$

   Am Ende des 8. Jahres.

   c) $N_1'(t) = -1539 \cdot e^{-0{,}0513t}$, $N_1'(0) \approx -1539$, $N_1'(10) \approx -921$

   d) $N_1 = N_2$: $30000 \cdot e^{-0{,}0513t} = 10000 \cdot e^{0{,}09531t}$, $3 = e^{0{,}14661t}$, $t \approx 7{,}493$

   $N_1(7{,}493) \approx 20426$

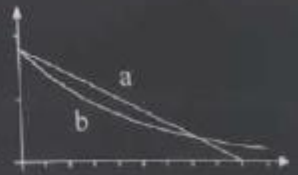
   Nach ca. $7\frac{1}{2}$ Jahren haben beide Städte jeweils ca. 20426 Einwohner.

   e) $s(t) = N_1(t) + N_2(t)$, $s'(t) = -1539 \cdot e^{-0{,}0513t} + 953{,}1 \cdot e^{0{,}09531t} = 0$, $t = \frac{\ln\frac{1539}{953{,}1}}{0{,}14661} \approx 3{,}27$

   Nach ca. 3,27 Jahren ist die Summe minimal.

122

5. a) stündlich 0,2 Promille Abbau: $a(t) = 1{,}8 - 0{,}2 \cdot t$



   b) $1{,}8 \cdot 0{,}8^t = 1{,}8 \cdot e^{\ln 0{,}8 \cdot t} = 1{,}8 \cdot e^{-0{,}2231t} = b(t)$

   c) $a(6) = 0{,}6 > 0{,}5$: Nein!

   d) $1{,}8 \cdot e^{-0{,}2231t} = 0{,}5$: $t = \frac{\ln\frac{1{,}8}{0{,}5}}{0{,}2231} \approx 5{,}74$

   Um kurz vor 6^{00} Uhr ist die Grenze erreicht.

   e) $d(t) = 1{,}8 - 0{,}2 \cdot t - 1{,}8 \cdot e^{-0{,}2231t}$

   $d'(t) = -0{,}2 + 0{,}4016 \cdot e^{-0{,}2231t}$, $d'(t) = 0$: $t = \frac{\ln\frac{0{,}2}{0{,}4016}}{-0{,}2231} \approx 3{,}12$

   Nach ca. 3,12 Stunden ist der Unterschied am größten.

   f) $a = b$: $1{,}8 - 0{,}2 \cdot t = 1{,}8 \cdot e^{-0{,}2231t}$

   Newton-Verfahren: $x_0 = 7$, $x_1 = 7 - \frac{0{,}4 - 1{,}8e^{-1{,}561}}{-0{,}2 + 0{,}4e^{-1{,}561}} \approx 7 - \frac{0{,}022}{-0{,}116} \approx 7{,}19$

   Nach ca. 7,19 Stunden zeigen beide Modelle den gleichen Wert 0,362 an.

6. a) Kettenregel: $p'(h) = -0{,}00013 \cdot 1013 \cdot e^{-0{,}00013h} = -0{,}00013 \cdot p(h)$

   b) $p(2000) \approx 781{,}10\text{mbar}$, $p(8882) \approx 319{,}26\text{mbar}$

   c) $1013 \cdot e^{-0{,}00013h} = 500$, $h \approx 5431\text{m}$

Wachstums- und Zerfallsprozesse II

Begrenzt

Big123,126

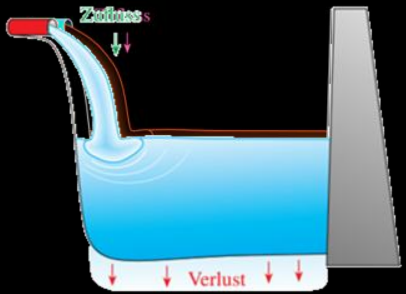
8. Population

Der Bestand einer Population wird durch die Funktion $N(t) = 10 - 8 \cdot e^{-0{,}2t}$ erfasst. Dabei gibt t die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn an und N (t) die Anzahl der Individuen in Tausend.

a) Zeichnen Sie den Graphen von N mit Hilfe einer Wertetabelle ($0 \le t \le 20$, Schrittweite 5).
b) Bestimmen Sie den Anfangsbestand und den Grenzbestand der Population.
c) Welcher Bestand liegt zur Zeit $t = 3$ vor?
d) Nach welcher Zeit hat sich der Anfangsbestand vervierfacht?
e) Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit (gemessen in Tausend Individuen pro Stunde) zu Beginn des Wachstumsprozesses bzw. nach 10 Stunden?

9. Stausee

Ein neuer natürlicher Stausee wird angelegt. Er wird durch einen konstanten Zufluss gefüllt, verliert aber mit zunehmender Füllung aufgrund des steigenden Wasserdrucks wieder Wasser durch den undichten Seeboden.
Berechnungen ergaben, dass die Erstbefüllung durch die Funktion W erfasst werden kann:
$W(t) = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-0{,}025t})$
(t: Zeit in Std., W: Wasservolumen in m^3)



a) Fertigen Sie eine Wertetabelle für die Funktion W an ($0 \le t \le 100$, Schrittweite 20). Skizzieren Sie den Graphen von W.
b) Wie groß wird das Wasservolumen nach 50 bzw. nach 200 Stunden sein? Welches Wasservolumen wäre maximal erreichbar?
c) Der See hat ein Leervolumen von $1\,200\,000\,m^3$. Kann er völlig gefüllt werden? Nach welcher Zeit ist er zur Hälfte gefüllt?
d) Mit welcher Geschwindigkeit (in m^3/h) füllt sich der See zur Zeit $t = 20$? Wie stark ist der konstante Zufluss?

10. Eisenschmelze

Eisen schmilzt bei 1538 °C. Eine glühende Eisenschmelze kühlt sich bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C innerhalb von 10 Minuten von 2000 °C auf 1800 °C ab.

a) Wie lautet die Abkühlungsfunktion?
b) Wie lange dauert es bis zur Erstarrung des Eisens?
c) Wie groß ist die Abkühlungsrate zu Beginn des Prozesses?

11. Chinesisch

Anja möchte China besuchen. Daher nimmt sie an einem Chinesisch-Kurs teil. Erfahrungsgemäß beginnen die Teilnehmer ohne Vorkenntnisse und besitzen eine maximale Lernkapazität von 500 Vokabeln. Ein durchschnittlicher Teilnehmer beherrscht nach einer Stunde 40 Vokabeln.

a) Wie lautet die Lernkurve eines durchschnittlichen Teilnehmers?
(t: Stunden, L (t): Anzahl der Vokabeln)
b) Wie lange benötigt ein Teilnehmer für die Hälfte der maximalen Kapazität?
c) Anja beherrscht nach einer Stunde schon 50 Vokabeln, nach zwei Stunden sind es sogar 98 Vokabeln.
Wie lautet ihre persönliche Lernkurve? Wo liegt ihre Kapazitätsgrenze?
d) Wann sinkt die Lernrate eines durchschnittlichen Teilnehmers auf 10 Vokabeln/Stunde? Welche Lernrate hat Anja zur Zeit $t = 10$?

12. Wölfe

In einem Waldgebiet ist Revierplatz vorhanden für maximal 800 Wölfe. Zu Beobachtungsbeginn werden 500 Wölfe gezählt. Nach drei Jahren sind es schon 700 Tiere.

a) Wie lautet die Bestandsfunktion N (t)?
b) Wie viele Wölfe gibt es nach fünf Jahren?
c) Zeichnen Sie den Graphen von N.
d) Durch intensivere Beforstung beginnt die Wolfspopulation seit Beginn des zehnten Jahres um 10% pro Jahr zu sinken.
Wann unterschreitet sie 100 Tiere?

13. Fanmeile

Die Fanmeile zur Fußball-WM wurde 60 Minuten vor Spielbeginn geöffnet. Nach 5 Minuten wurden bereits 32 135 Personen eingelassen. Es wird angenommen, dass die Anzahl der eingelassenen Personen durch $P(t) = 300\,000\,(1 - e^{-kt})$ beschrieben werden kann (t: Zeit in Minuten, P (t): Personenzahl).

a) Bestimmen Sie den Koeffizienten k.
b) Wie viele Personen sind nach 30 Minuten auf der Fanmeile?
c) Wie groß ist die Maximalkapazität der Meile? Wann erreicht die Auslastung 90%?
d) Wie groß ist die Einlassgeschwindigkeit zu Beginn bzw. nach 30 Minuten?

Wachstums- und Zerfallsprozesse II

124

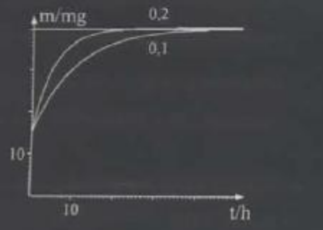
7. $30 = 40 - 25 \cdot e^{-0,1t}$, $0,4 = e^{-0,1t}$

$t = \frac{\ln 0,4}{-0,1} \approx 9,16$

$30 = 40 - 25 \cdot e^{-0,2t}$, $0,4 = e^{-0,2t}$

$t = \frac{\ln 0,4}{-0,2} \approx 4,58$

30g werden nach ca. 9,16 Tagen ($k = 0,1$) bzw. nach ca. 4,58 Tagen ($k = 0,2$) erreicht.
Wachstumsgeschwindigkeit: $m'(x) = 25k \cdot e^{-kt}$
$k = 0,1$: $m'(0) = 2,5$; $m'(10) = 0,92$
$k = 0,2$: $m'(0) = 5$; $m'(10) = 0,68$



125

8. b) $N(0) = 2$; Anfangsbestand: 2000

$G = \lim_{t\to\infty} N(t) = 10$; Grenzbestand: 10000

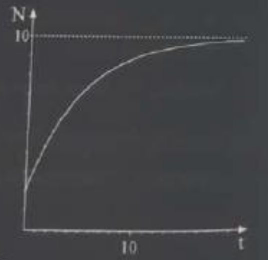
c) $N(3) = 10 - 8e^{-0,6} = 5,61$
Bestand zur Zeit $t = 3$: 5610

d) $8 = 10 - 8e^{-0,2t}$, $t = \frac{\ln\frac{2}{8}}{-0,2} \approx 6,93$

Nach ca. 7 Stunden hat sich der Anfangsbestand vervierfacht.

e) $N'(t) = 1,6e^{-0,2t}$, $N'(0) = 1,6$, $N'(10) = 1,6e^{-2} = 0,22$
Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu Beginn 1600 und nach 10 Sunden 220 Individuen pro Stunde.

a)



125

9. a)

t	0	20	40	60	80	100
W	0	393469	632121	776870	864665	917915

b) $W(50) \approx 713495\ m^3$, $W(200) \approx 993262\ m^3$

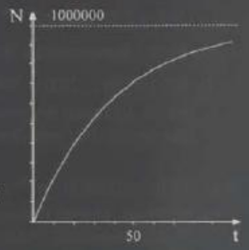
$\lim_{t\to\infty} W(t) = 1000000 m^3$

c) Wegen b) kann er nicht völlig gefüllt werden.
$600000 = 1000000(1 - e^{-0,025t})$

$e^{-0,025t} = 1 - 0,6 = 0,4$, $t = \frac{\ln 0,4}{-0,025} \approx 36,65$

Nach ca. 37 Stunden ist er zur Hälfte gefüllt.

d) $W'(t) = 25000e^{-0,025t}$, $W'(20) = 15163$, $W'(0) = 25000$
Der konstante Zufluss beträgt 25000 m³/h, nach 20 Stunden füllt sich der See noch mit ca. 15163 m³/h.



10. a) Wir benutzen als Ansatz die Gleichung des begrenzten Wachstums, die mit einem positiven Faktor c zu einem monoton fallenden Verlauf führt.

$T(t) = 20 + c \cdot e^{-kt}$, $T(0) = 2000$: $c = 1980$

$T(10) = 20 + 1980 \cdot e^{-10k} = 1800$: $k = \frac{\ln\frac{1780}{1980}}{-10} \approx 0,011$

$T(t) = 20 + 1980 \cdot e^{-0,011t}$

b) $T(t) = 20 + 1980 \cdot e^{-0,011t} = 1538$: $t = \frac{\ln\frac{1518}{1980}}{-0,011} \approx 24,15$

Es dauert etwas länger als 24 Minuten.

c) $T'(t) = -21,78 \cdot e^{-0,011t}$, $T'(0) = -21,78$ °C/min

126

11. a) $L(t) = 500 - 500 \cdot e^{kt}$, $L(1) = 40$: $500 - 500e^{k} = 40$, $k = \frac{\ln\frac{460}{500}}{1} \approx -0,0834$

$L(t) = 500 - 500 \cdot e^{-0,0834t}$

b) $250 = 500 - 500 \cdot e^{-0,0834t}$, $t = \frac{\ln 2}{0,0834} \approx 8,31$

Er benötigt etwas mehr als 8 Stunden.

c) Ansatz: $L_A(t) = N_0 - N_0 \cdot e^{kt}$

$N(1 - e^{k}) = 50$ und $N(1 - e^{2k}) = 98$

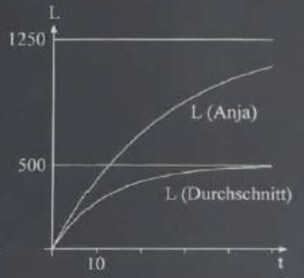
$\frac{1-e^{2k}}{1-e^{k}} = \frac{98}{50}$, $1 + e^{k} = \frac{98}{50}$, $k = \ln\frac{48}{50} \approx -0,0408$

$N = \frac{50}{1-e^{-0,0408}} \approx 1250$, $L_A(t) = 1250(1 - e^{-0,0408})$

Anjas Kapazitätsgrenze liegt bei 1250 Vokabeln.

d) $L'(t) = 41,7 \cdot e^{-0,0834t} = 10$, $t \approx 17,12$
Nach ca. 17 Stunden sinkt die Lernrate auf 10 Vokabeln pro Stunde.
Anjas Lernrate nach 10 Stunden:

$L_A'(10) = 51 \cdot e^{-0,408} \approx 34$ Vokabeln pro Stunde



126

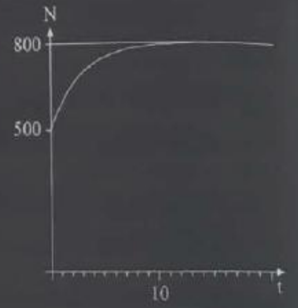
12. a) $N'(t) = k \cdot (800 - N(t))$, $N(t) = 800 - 300 \cdot e^{kt}$

$N(3) = 800 - 300 \cdot e^{3k} = 700$, $k \approx -0,366$

$N(t) = 800 - 300 \cdot e^{-0,366t}$

b) Nach 5 Jahren sind es $N(5) \approx 752$ Wölfe.

d) $N(9) \approx 789$, $N(t) = 789 \cdot 0,9^{t} = 100$, $t \approx 19,6$
Im 20. Jahr nach Beginn des Absinkens also im 30. Jahr seit Beobachtungsbeginn.



13. a) $P(5)$: $300000(1 - e^{-5k}) = 32135$, $k \approx 0,0227$

b) $P(30)$: ca. 148000 Personen

c) Maximalkapazität: 300000 Personen

$300000(1 - e^{-0,0227t}) = 270000$

$0,1 = e^{-0,0227t}$, $t \approx 101$

Nach 101 Minuten, also ca. 41 Minuten nach Beginn des Spiels beträgt die Auslastung 90%.

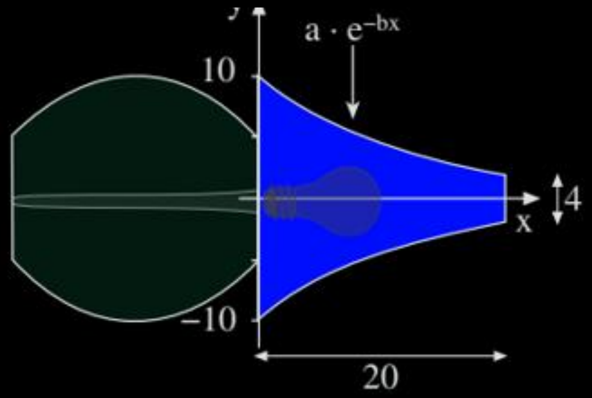
d) $P'(t) = 6810 \cdot e^{-0,0227t}$, $P'(0) \approx 6810$, $P'(30) \approx 3447$

Zu Beginn beträgt die Einlassgeschwindigkeit ca. 6800 Personen pro Minute, nach 30 Minuten sind es ca. 3450 Personen pro Minute.

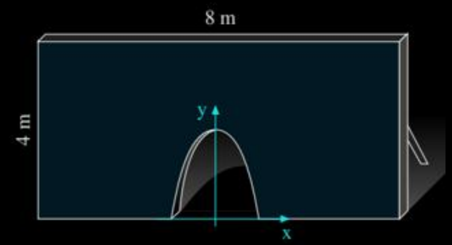
Modellierung mit Exponentialfunktionen

Big129,130

Übung 2 Lampenprofil
Die Abbildung zeigt das Querschnittsprofil einer Lampe.
Das Exponentialprofil des Schirmes ist unten 20 cm breit, oben dagegen nur 4 cm. Der Schirm ist 20 cm hoch. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schirmquerschnittes.

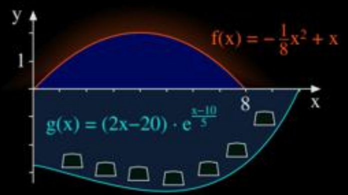


3. Historisches Stadttor
Für eine Theateraufführung in der Schule wird ein historisches Stadttor aus Sperrholzplatten benötigt.
Der Regisseur hat den Wunsch, dass die Toröffnung in der Mitte ca. 2 m hoch und unten 2 m breit ist.
Die Randkurve des Torbogens soll modelliert werden durch die Funktion
$f(x) = 2{,}4 - 0{,}2\,(e^{2{,}5x} + e^{-2{,}5x})$.



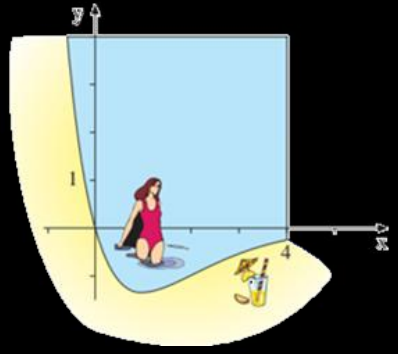
a) Werden die Vorgaben des Regisseurs in etwa eingehalten?
b) In welchem Winkel muss die Säge beim Ausschneiden des Torbogens angesetzt werden?
c) Der Aufbau wird nach dem Ausschneiden des Tors gestrichen. Wie groß ist die zu streichende Fläche?

4. Inseln
In Dubai werden im Meer künstliche Inseln aufgeschüttet. Die Küsten einer Insel werden wie abgebildet durch die Funktionen f (Strand) und g (Wohnen) beschrieben.
(1 LE = 100 m)



a) Zeigen Sie, dass $G(x) = (10x - 150) \cdot e^{\frac{x-10}{5}}$ eine Stammfunktion von g ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Insel.
b) Welche maximale Nord-Süd-Ausdehnung hat der untere Teil der Insel, d. h. das Wohngebiet?

5. Schwimmbad
Ein Wasserbecken wird durch die beiden Geraden $x = 4$ und $y = 4$ sowie die Funktion $f(x) = -10x \cdot e^{-x-1}$ begrenzt (1 LE = 10 m).



a) Wie lang ist der rechte Beckenrand?
Zeigen Sie, dass der obere Beckenrand ca. 46 m lang ist.
b) An welcher Stelle ist die vertikale Ausdehnung des Beckens am größten?
c) Wie viele Quadratmeter Fliesen werden für den Beckenboden benötigt?
Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $F(x) = 10(x+1)e^{-x-1}$ Stammfunktion von f ist.

Modellierung mit Exponentialfunktionen

129

2. $g(0) = 10 = a$

$g(20) = 2 = 10 \cdot e^{-20b}$, $\quad b = \frac{\ln 0{,}2}{-20} \approx 0{,}08$, $\quad g(x) = 10 \cdot e^{-0{,}08x}$

$$A = 2 \cdot \int_0^{20} 10 \cdot e^{-0{,}08x}dx = 2 \cdot [-125 \cdot e^{-0{,}08x}]_0^{20} \approx 199{,}53$$

Der Flächeninhalt des Querschnittes beträgt ca. 199,53 cm^2.

130

3. a) $f(0) = 2{,}4 - 0{,}2 \cdot 2 = 2$, Höhe stimmt
   $f(-1) = -0{,}05 \approx 0$, $f(1) \approx 0$, Breite stimmt
   b) $f'(x) = -0{,}2(2{,}5e^{2{,}5x} - 2{,}5e^{-2{,}5x}) = -0{,}5(e^{2{,}5x} - e^{-2{,}5x})$
   $f'(-1) \approx 6{,}05$, $\alpha \approx 80{,}6°$
   Am linken unteren Torbogen muss die Säge unter ca. 81° angesetzt werden.
   c) Zu streichende Fläche: $A = 4 \cdot 8 - A_{Torbogen}$

   $$A_{Torbogen} = 2\int_0^1 f(x)dx = 2[2{,}4x - 0{,}2(\tfrac{2}{5}e^{2{,}5x} - \tfrac{2}{5}e^{-2{,}5x})]_0^1 \approx 2{,}86$$

   $A \approx 32 - 2{,}86 = 29{,}14$
   Die zu streichende Fläche beträgt ca. 29 m^2.

4. a) $G'(x) = (2x-20)\,e^{\frac{x-10}{5}} = g(x)$

   $$A = A_{gelb} + A_{rot} = \int_0^8 f(x)dx + \int_0^{10} g(x)dx$$

   $$= [-\tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2]_0^8 + |[(10x-150)e^{\frac{x-10}{5}}]_0^{10}| \approx 40{,}37$$

   Der Flächeninhalt beträgt ca. 40,37 FE = 403700 m^2 = 40,37 ha.
   b) $g'(x) = (\tfrac{2}{5}x - 2)e^{\frac{x-10}{5}}$, $g'(x) = 0$ für $x = 5$, $g(5) \approx -3{,}68$
   Die Nord–Süd–Ausdehnung beträgt ca. 368 m.

130

5. a) $4 - f(4) = 4 + 40e^{-5} \approx 4{,}27$: Der rechte Beckenrand ist ca. 42,7 m lang.
   Oberer Rand: $f(x) = 4$, $4 = -10xe^{-x-1}$;
   schrittweises Probieren, beginnend mit $x = -0{,}5$ führt auf $x \approx -0{,}6$
   Der obere Rand ist ca. 46 m lang.
   b) $f'(x) = (10x-10)e^{-x-1}$, $f'(x) = 0$ für $x = 1$, $f(1) = -10e^{-2} \approx -1{,}35$
   Die maximale vertikale Ausdehnung beträgt ca. 53,5 m.
   c) $F'(x) = 10(1-x-1)e^{-x-1} = -10xe^{-x-1} = f(x)$

   $$A = \int_{-0{,}6}^{4} (4 + 10xe^{-x-1})dx = [4x - 10(x+1)e^{-x-1}]_{-0{,}6}^{4} \approx 20{,}74$$

   Es werden ca. 2074 m^2 Fliesen benötigt.

Exponentielle Prozesse |

Beschreiung von Prozessen

Big139

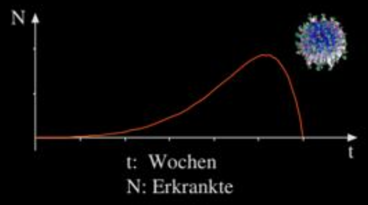
3. Kapitalanlage

Franz hat sein gesamtes Sparguthaben bei der Sparkasse abgehoben und in einige Hasen investiert, die nun bei ihm zuhause leben. Die Hasen vermehren sich schnell, aber es kommt auch zunehmend zu Fluchtvorgängen. Insgesamt verändert sich die Population nach der Formel $h(t) = (240 + 20t) \cdot e^{-0{,}05t}$ (t: Monate; h(t): Anzahl der Hasen zur Zeit t).

a) Wie viele Hasen hat Franz gekauft? Wie viele sind es nach einem Jahr?
b) Mit welcher Rate wächst die Hasenpopulation zu Beginn (in Hasen/Monat)?
c) Wann erreicht die Population ihr Maximum?
d) Zu welchem Zeitpunkt verringert sich die Population am stärksten?

4. Grippeepidemie

Die jährliche Grippeepidemie hat gerade begonnen. Aus den ersten eingehenden Meldungen modellieren die Epidemiologen des Robert-Koch-Instituts eine Prognosefunktion für die Entwicklung der Erkranktenzahlen: $N(t) = (6t - t^2) \cdot e^{t-6}$ $(t \geq 0)$.
Ihr Graph ist rechts grob skizziert.



a) Wie lange wird die Epidemie dauern?
b) Wann ist das Maximum erreicht? Wie groß ist die maximale Erkranktenzahl?
c) Wann nimmt die Anzahl der Erkrankten am schnellsten zu? Wie groß ist sie zu diesem Zeitpunkt? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die momentane Zunahmerate?

5. Segelflug

Ein Segelflugzeug wird in 100 m Höhe ausgeklinkt. Seine vertikale Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten nach dem Ausklinken wird durch die Funktion $v(t) = 100 - 100t \cdot e^{-0{,}5(t-1)}$ beschrieben (t: Zeit in Minuten, v(t): Steiggeschwindigkeit in Meter/min).

a) Begründen Sie, dass das Flugzeug in der ersten Minute steigt, in den anschließenden 2,51 Minuten sinkt und danach wieder steigt.
b) Wann ist die Sinkgeschwindigkeit am größten? Zeichnen Sie den Graphen von v.
c) Weisen Sie nach, dass $V(t) = (2t + 4)e^{-0{,}5(t-1)}$ eine Stammfunktion von $v(t) = -te^{-0{,}5(t-1)}$ ist.
Leiten Sie hieraus die Funktion h(t) her, welche angibt, in welcher Höhe sich das Flugzeug zum Zeitpunkt t nach dem Ausklinken befindet $(0 \leq t \leq 10)$.
Welche Höhe erreicht es vor dem Absinken? Welches ist seine geringste Höhe nach der Sinkphase? In welcher Höhe fliegt es 10 Minuten nach dem Ausklinken?

Exponentielle Prozesse

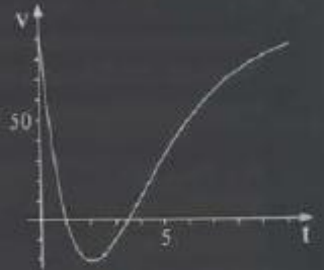
3. a) $h(0) = 240$, $h(12) = 263$
Franz hat 240 Hasen gekauft. Nach einem Jahr sind es 263 Hasen.
b) $h'(t) = (8-t)e^{-0,05t}$, $h'(0) = 8$: Die Wachstumsrate beträgt 8 Hasen/Monat.
c) $h'(t) = 0$ gilt für $t = 8$, $h''(t) = (0,05t-1,4)e^{-0,05t}$, $h''(8) = -e^{-0,4} < 0$, Max.
Nach 8 Monaten erreicht die Population ihr Maximum.
d) $h''(t) = 0$ gilt für $t = 28$: Nach 28 Monaten verringert sich die Population am stärksten.

4. a) Nullstellen: $t = 0$ und $t = 6$
Die Epidemie dauert 6 Wochen.
b) Ableitungen: $N'(t) = (-t^2 + 4t + 6) \cdot e^{t-6}$, $N''(t) = (-t^2 + 2t + 10) \cdot e^{t-6}$

Extrema: $N' = 0$: $t = 2 \pm \sqrt{10}$, $N''(5{,}16) < 0 \Rightarrow H(5{,}16 \mid 1{,}87)$
Nach 5,16 Wochen ist mit ca. 1,87 Millionen Erkrankten das Maximum erreicht.

c) Die Erkranktenzahl steigt im Wendepunkt am schnellsten.
$N'' = 0$: $t = 1 \pm \sqrt{11}$, $N'(4{,}32) \approx 0{,}86$, $N(4{,}32) \approx 1{,}35$
Die Erkranktenzahl steigt nach 4,32 Wochen am schnellsten mit ca. 1,35 Millionen.
Die Erkrankungsrate beträgt ca. 0,86 Millionen/Woche.

5. a) $v(1) = 0$, $v(3{,}51) \approx 0$
$v > 0$ für $t \in (0;1)$, $v < 0$ für $t \in (1;3{,}51)$, $v > 0$ für $t > 3{,}51$
b) $v'(t) = (-100 + 50t) \cdot e^{-0,5(t-1)}$, $v'(t) = 0$: $t = 2$, $v(2) \approx -21{,}31$
Die Sinkgeschwindigkeit ist bei $t = 2$ mit $v(2) \approx -21{,}31$ m/min am größten.
c) $V'(t) = (2 - t - 2) \cdot e^{-0,5(t-1)} = -t \cdot e^{-0,5(t-1)} = v(t)$
$h(t) = 100t + (200t + 400) \cdot e^{-0,5(t-1)} - 559{,}5$
vor dem Absinken bei $t = 1$: $h(1) = 140{,}5$m
geringste Höhe nach der Sinkphase bei
$t \approx 3{,}51$: $h(3{,}51) \approx 105{,}65$m
10min nach dem Ausklinken: $h(10) \approx 467{,}16$m



Exponentielle Prozesse II

Rekonstruktion von Beständen Big142,143

8. Ölförderung

Ein Erdölproduzent besitzt eine Ölquelle, die langsam versiegt. Die Fördergeschwindigkeit lässt sich durch die Funktion $m'(t) = 1 + 10 \cdot e^{-0{,}01t}$ beschreiben (t: Tage, m'(t): Tonnen/Tag). Gesucht ist die Funktion m(t), welche die Ölmenge beschreibt, die bis zum Zeitpunkt t gefördert wird, beginnend zur Zeit $t = 0$.

a) Bestimmen Sie m(t) als Stammfunktion von m'(t) mit $m(0) = 0$.

b) Die Ölquelle wird stillgelegt, wenn die Fördergeschwindigkeit auf 3 Tonnen/Tag absinkt. Wann ist dies der Fall? Wie viel Öl wird bis zu diesem Zeitpunkt gefördert?

9. Keine Geldsorgen

In Dagoberts Geldspeicher (30 m hoch) liegen die Taler 20 m hoch. Die Zuwachsrate der Höhenfunktion h beträgt $h'(t) = e^{-0{,}05t}$ (t: Tage, h'(t): m/Tag):

a) Wie lautet die Gleichung der Höhenfunktion?

b) Wann läuft Dagoberts Geldspeicher über?

10. Gletscherlänge

Ein Gletscher, der zur Zeit 30 km lang ist, verkürzt sich mit der Zeit. Die Änderungsrate seiner Länge L ist $L'(t) = -0{,}4 \cdot e^{-0{,}02t}$.

(t: Jahre, L'(t): km/Jahr)

a) Wie lautet die Funktion L(t), welche die Länge des Gletschers beschreibt?

b) Wann ist der Gletscher nur noch 15 km lang?

11. Kernbrennstab

Mit einem Messinstrument wird die Zerfallsrate z(t) eines Kernbrennstoffes gemessen. Die Messwerte sind in der Tabelle protokolliert. (t in Stunden, z(t) in mg pro Stunde)

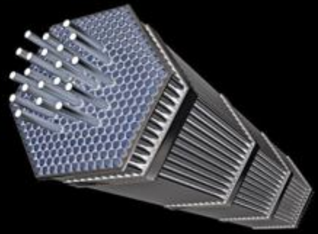
t	0	1	2	3	4
z(t)	20,00	18,09	16,37	14,82	13,41

a) Stellen Sie eine Funktion auf, welche die Zerfallsrate beschreibt. Verwenden Sie den Ansatz $z(t) = c \cdot e^{-kt}$.

b) Wann hat sich die Zerfallsrate halbiert?

c) Zu Beginn sind es 1 000 mg. Bestimmen Sie die Bestandsfunktion M(t) für die Masse der seit Beobachtungsbeginn zerfallenen Substanz.

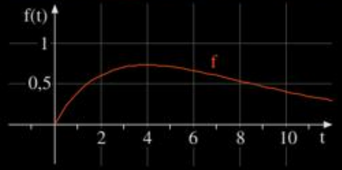
d) Wie viel Masse ist nach 24 Stunden insgesamt zerfallen?



12. Elefantenbestand

In einem großen afrikanischen Nationalpark wird der Elefantenbestand kontrolliert und geschützt. Dadurch wächst die Population, die zum Zeitpunkt $t = 0$ bei 2 500 Elefanten liegt, mit einer Wachstumsrate, welche durch die Funktion $f(t) = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25t}$ beschrieben wird.

($t \geq 0$: Zeit in Jahren, f(t): Zuwachsrate in Tausend/Jahr)



a) Ermitteln Sie den Funktionswert von f an der Stelle $t = 10$. Erläutern Sie das Ergebnis.

b) Beschreiben Sie anhand des rechts dargestellten Graphen von f, wie sich die Elefantenpopulation entwickelt.

c) Wann wächst die Elefantenpopulation am stärksten?

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(t) = -2e^{-0{,}25t}(t + 4)$ eine Stammfunktion von f ist.

e) Welche Funktion G(t) beschreibt den Bestand der Elefantenpopulation zum Zeitpunkt t?

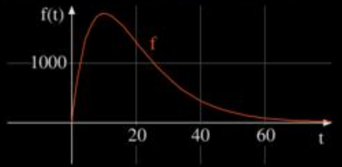
f) Welche Maximalpopulation kann erreicht werden?

13. Fernsehshow

In einer Fernsehshow werden die Zuschauer dazu animiert, eine eingeblendete Telefonnummer anzurufen. Unter allen Anrufern wird ein Luxuswagen verlost.

Die Anrufrate der Zuschauer wird modellhaft durch $f(t) = 500t \cdot e^{-0{,}1t}$ beschrieben. ($t \geq 0$: Minuten, f(t): Anrufe/min)

Der Graph von f ist rechts dargestellt.



a) Bestimmen und interpretieren Sie f(5).

b) Ermitteln Sie die maximale Anrufrate.

c) Um die nach einiger Zeit fallende Anrufrate wieder zu steigern, wird erwogen, die Zuschauer erneut zum Anrufen aufzufordern, wenn die Anrufrate auf die Hälfte ihres Maximalwertes gefallen ist. Ermitteln Sie näherungsweise, wann das der Fall ist.

d) Alternativ wird erwogen, die Zuschauer erneut zum Anrufen aufzufordern, wenn die Anrufrate am stärksten fällt. Ermitteln Sie den geeigneten Zeitpunkt.

e) Weisen Sie nach, dass $F(t) = -5000 \cdot e^{-0{,}1t}(t + 10)$ eine Stammfunktion von f ist. Ermitteln Sie die Gesamtzahl der eingehenden Anrufe in der ersten *Stunde* nach der Aufforderung zum Anrufen.

Exponentielle Prozesse II

142

8. a) $m(t) = t - 1000e^{-0{,}01t} + C$, $m(0) = 0$, $C = 1000$
   $m(t) = t - 1000e^{-0{,}01t} + 1000$
   b) $m'(t) = 3$, $3 = 1 + 10e^{-0{,}01t}$ gilt für $t \approx 161$
   Nach 161 Tagen sinkt die Fördergeschwindigkeit unter 3 Tonnen/Tag.
   $\text{Ölmenge} = \int_0^{161} m'(t)dt = [t - 1000e^{-0{,}01t} + 1000]_0^{161} \approx 961{,}1$
   Es werden 961 Tonnen gefördert.

9. a) $h(t) = \frac{1}{-0{,}05}e^{-0{,}05t} + C = -20e^{-0{,}05t} + C$, $h(0) = 20 \Rightarrow C = 40$
   $h(t) = 40 - 20e^{-0{,}05t}$
   b) $h(t) = 30$, $30 = 40 - 20e^{-0{,}05t}$ gilt für $t \approx 13{,}86$
   Am 14. Tag läuft der Speicher über.

142

10. a) $L(t) = 20e^{-0{,}02t} + C$, $L(0) = 30$, $C = 10$
   $L(t) = 10 + 20e^{-0{,}02t}$
   b) $L(t) = 15$, $15 = 10 + 20e^{-0{,}02t}$ gilt für $t \approx 69{,}31$
   Nach ca. 69 Jahren wird der Gletscher nur noch 15 km lang sein.

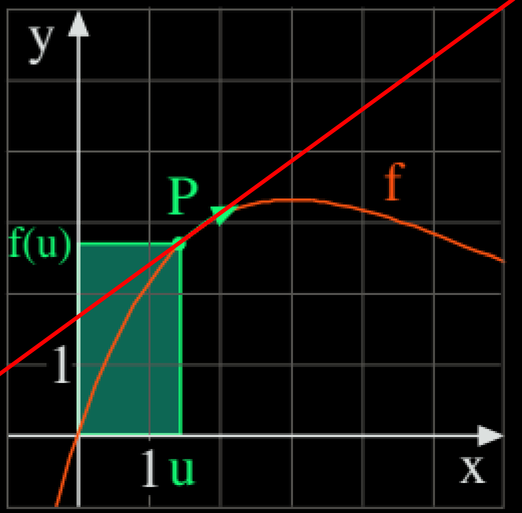
11. a) $z(t) = c \cdot e^{-kt}$, $t = 0$: $c = 20$; $t = 1$: $18{,}09 = 20 \cdot e^{-k}$, $k \approx 0{,}1$, $z(t) = 20 \cdot e^{-0{,}1t}$
   b) $10 = 20 \cdot e^{-0{,}1t}$, $t \approx 6{,}93$ Nach etwa 7 Stunden.
   c) $M(t) = \int z(t)dt = -200 \cdot e^{-0{,}1t} + C$, $C = 200$ (wg. $M(0) = 0$)
   d) $M(24) = 182$mg

12. a) $f(10) = 5e^{-2{,}5} \approx 0{,}41$: Nach 10 Jahren beträgt die Zuwachsrate 410 Elefanten.
   b) Die Population steigt im gesamten dargestellten Bereich.
   c) Sie wächst im Wendepunkt bei $t = 4$ am stärksten.
   d) $F'(t) = 0{,}5e^{-0{,}25t}(t+4) - 2e^{-0{,}25t} = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25t} = f(t)$
   e) $G(t) = F(t) + C$ mit $G(0) = -8 + C = 2{,}5$, $C = 10{,}5$
   f) Die Maximalpopulation beträgt 10500 Elefanten.

143

13. a) $f(5) = 2500e^{-0{,}5} \approx 1516{,}33$
   Nach 5 Minuten rufen ca. 1516 Zuschauer an.
   b) $f'(t) = (500 - 50t) \cdot e^{-0{,}1t} = 0$ gilt für $t = 10$, $f(10) = 1839$
   Die maximale Anrufrate beträgt 1839.
   c) $500t \cdot e^{-0{,}1t} = 919{,}5$, $t \approx 27$
   d) Am stärksten im Wendepunkt: $f''(t) = (5t - 100) \cdot e^{-0{,}1t} = 0$ gilt für $t = 20$
   e) $F'(t) = 500 \cdot e^{-0{,}1t}(t+10) - 5000 \cdot e^{-0{,}1t} = 500t \cdot e^{-0{,}1t} = f(t)$
   $G = F(60) - F(0) \approx 49132$

Big148 – Test



1. Ganzrationale Funktion

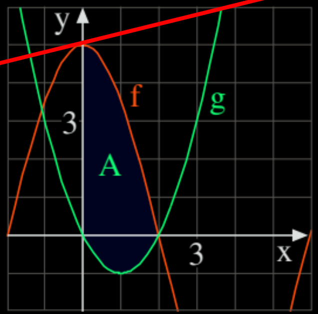
Untersuchen Sie die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen von f für $-1 \leq x \leq 4$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die im 4. Quadranten vom Graphen von f und der x-Achse umschlossen wird.

2. Trigonometrische Funktionen

Gegeben sind $f(x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ und $g(x) = x\,(x-2)$.

a) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$?

b) Die Graphen von f und g und die y-Achse begrenzen im ersten und vierten Quadranten die Fläche A. Berechnen Sie deren Inhalt.



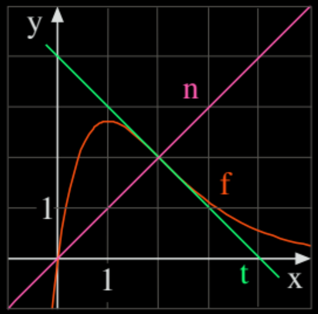
3. Exponentialfunktionen

a) Berechnen Sie das Extremum und den Wendepunkt der Funktion $f(x) = x \cdot e^{2-x}$.

b) Wie lauten die Gleichungen der Wendetangente t und der Wendenormale n?

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Formansatzes $F(x) = (a\,x + b) \cdot e^{2-x}$ eine Stammfunktion von f.

d) Wie groß ist der Inhalt der Fläche A, die vom Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [0; 4] eingeschlossen wird?



4. Extremalproblem

Ein Punkt $P(u|f(u))$ $(u > 0)$ bewegt sich auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 3x \cdot e^{-\frac{x}{3}}$. Wie muss u gewählt werden, damit der Inhalt des eingezeichneten achsenparallelen Rechtecks maximal wird?

5. Bestandsrekonstruktion

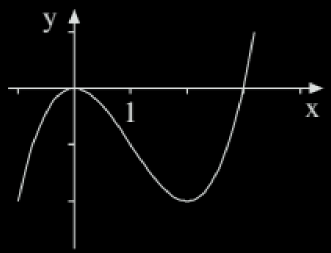
In einem Revier wird die Änderungsrate des Wolfsbestands durch $N'(t) = (20 - 20t) \cdot e^{-t}$ beschrieben (t: Zeit in Jahren, N(t): Bestand an Wölfen). Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes betrug der Bestand 40 Wölfe.

a) Bestimmen Sie die Bestandsfunktion $N(t) = a + (b\,t + c) \cdot e^{-t}$.

b) Welchen Maximalbestand erreicht die Wolfspopulation?

Big148 – Lösungen

1. Nullstellen: $x = 0$ und $x = 3$



   $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x, \quad f''(x) = 3x - 3, \quad f'''(x) = 3$

   Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$ und $x = 2$

   $f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H(0|0), \quad f''(2) = 3 > 0 \Rightarrow T(2|-2)$

   Wendepunkt: $f''(x) = 0$, $x = 1$, $f'''(1) = 3$ also R-L-W $(1|-1)$

   Fläche A: $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right]_0^3 = -3{,}375$; Der Flächeninhalt beträgt 3,375 FE.

2. a) $f'(x) = -\frac{5}{4}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), \quad f'(2) = -\frac{5}{4}\pi, \quad f(2) = 0$

   $t(x) = -\frac{5}{4}\pi(x-2) = -\frac{5}{4}\pi x + \frac{5}{2}\pi$

   b) $A = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \left[\frac{20}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{20}{\pi} - \frac{8}{3} + 4 \approx 7{,}70$

3. a) $f'(x) = (1-x) \cdot e^{2-x}, \quad f''(x) = (x-2) \cdot e^{2-x}$

   Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 1, \quad f''(1) < 0 \Rightarrow H(1|e)$

   Wendepunkt: $f''(x) = 0$: $x = 2, \quad W(2|2)$

   b) Wendetangente: $t(x) = -(x-2) + 2 = -x + 4$

   Wendenormale: $n(x) = (x-2) + 2 = x$

   c) $F'(x) = (a - b - ax) \cdot e^{2-x} = x \cdot e^{2-x} \Rightarrow a = -1, \quad b = -1$

   $F(x) = -(x+1) \cdot e^{2-x}$, Probe: $F'(x) = -(1 - x - 1) \cdot e^{2-x} = x \cdot e^{2-x} = f(x)$

   d) $A = F(4) - F(0) = -5 \cdot e^{-2} + e^2 \approx 6{,}71$

4. $A = x \cdot y = 3x^2 \cdot e^{-\frac{x}{3}}, \quad A'(x) = (6x - x^2) \cdot e^{-\frac{x}{3}} = 0, \quad x = 0, \quad x = 6$

   Für $u = 6$ ist der Inhalt maximal.

5. a) $N''(t) = (20t - 40) \cdot e^{-t}$ Vermutung: $N(t) = 20t \cdot e^{-t}$

   Probe: $N'(t) = (20 - 20t) \cdot e^{-t}$

   $N(0) = 40$: $N(t) = 20t \cdot e^{-t} + 40$

   b) $N'(t) = 0$: $t = 1$, $N(1) = 20 \cdot e^{-1} + 40 \approx 47$