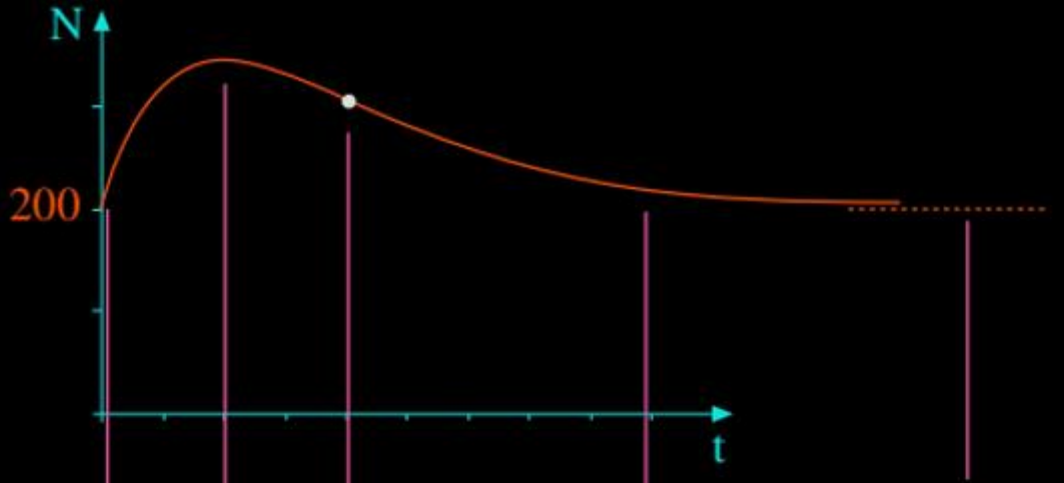
Mathematik Q1 Abels

Kopfübung

- $\left(200 + 200t \cdot e^{-0,5t}\right)' =$
- Was bedeutet „momentane Änderungsrate“ und wie bestimmt man sie?
- In welchem Punkt hat eine Funktion die größte bzw. kleinste Steigung?
- Wie bestimme ich den Punkt der größten bzw. kleinsten Steigung einer Funktion?

Exponentielle Prozesse

Beschreibe für jedes Problem kurz, wie du vorgehen würdest.



1. Verhalten von N für $t \to \infty$
   Grenzwertproblem
2. Exakte Zeichnung der Bestandskurve.
   Problem der Kurvendiskussion
3. Zeitpunkt der stärksten Abnahmerate
   Wendepunktproblem
4. Maximalbestand an Wildschweinen
   Extremalproblem
5. Zunahmerate des Bestandes zu Beobachtungsbeginn
   Problem der momentanen Änderungsrate

Big136,137

Beispiel: Wildschweinplage

Im Stadtgebiet breiten sich die Wildschweine aus. Durch ein Wildpflegeprogramm hofft man, der Plage Herr zu werden. Der Bestand soll sich damit kontrolliert gemäß der Funktion $N(t) = 200 + 200t \cdot e^{-0{,}5t}$ entwickeln (t: Jahre; N(t): Anzahl der Schweine).
Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Bestand am stärksten ab? Wie groß ist die momentane Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt?

Beispiel: Wildschweinplage (Teil 2)

Ein Wildschweinbestand entwickelt sich gemäß der Bestandsfunktion $N(t) = 200 + 200t \cdot e^{-0{,}5t}$.
t: Zeit in Jahren; N(t): Bestand in Schweinen

a) Mit welcher Geschwindigkeit wächst der Bestand zu Beobachtungsbeginn?
   Wie groß ist die mittlere Zuwachsrate in den ersten beiden Jahren?
b) Welcher Maximalbestand wird erreicht?
c) Welchem Grenzbestand nähert sich die Population langfristig?

Big136,137

Beispiel: Wildschweinplage

Lösung:
Im Wendepunkt der Bestandsfunktion ist die Abnahmerate am größten. Wir bestimmen diesen Punkt, indem wir N'' gleich null setzen (notwendige Bedingung).

Dies führt auf die Wendestelle $t = 4$.

Die momentane Änderungsrate an dieser Stelle erhalten wir durch Berechnen von $N'(4)$: Sie beträgt $-27{,}07$ Tiere/Jahr, was gleichbedeutend ist mit $-2{,}26$ Tiere/Monat.

Ableitungen von N

$N'(t) = (200 - 100t) \cdot e^{-0,5t}$

$N''(t) = (50t - 200) \cdot e^{-0,5t}$

Wendepunkt von N

$N''(t) = 0$

$(50t - 200) \cdot e^{-0,5t} = 0$

$50t - 200 = 0$

$t = 4$

$N'(4) = -27{,}07\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Jahr}} = -2{,}26\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Monat}}$

Beispiel: Wildschweinplage (Teil 2)

Lösung zu a:
Die momentane Änderungsrate zur Zeit $t = 0$ errechnen wir mit der Ableitungsfunktion N'. Resultat: Zu Beginn wächst die Population um ca. 17 Tiere pro Monat.

Die mittlere Zuwachsrate in den ersten zwei Jahren errechnen wir mit dem Differenzenquotienten. Sie beträgt 6 Tiere pro Monat.

Lösung zu b:
Mithilfe der notwendigen Bedingung für Extrema ($N'(t) = 0$) bestimmen wir die Lage des Maximums von N. Es liegt bei $t = 2$. Die Anzahl der Schweine beträgt maximal 347.

Lösung zu c:
Wir erkennen anhand einer Tabelle, dass die Bestandsfunktion $N(t)$ sich mit wachsendem t dem Wert 200 nähert. Dies ist der langfristige Grenzbestand.

Momentane Wachstumsrate zur Zeit t = 0

$N'(t) = (200 - 100t) \cdot e^{-0,5t}$

$N'(0) = 200\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Jahr}} \approx 16{,}67\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Monat}}$

Mittlere Wachstumsrate in 2 Jahren

$\frac{N(2) - N(0)}{2 - 0} \approx \frac{347{,}15 - 200}{2} \approx 73{,}58\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Jahr}}$

$\approx 6{,}13\,\frac{\text{Tiere}}{\text{Monat}}$

Maximaler Bestand

$N'(t) = (200 - 100t) \cdot e^{-0,5t}$

$N'(t) = 0$

$200 - 100t = 0,\ t = 2$

$N(2) = 347{,}15$ Schweine

Grenzbestand $t \to \infty$

t	0	1	10	20	$\to \infty$
N(t)	200	321,3	213,5	200,2	$\to 200$

$\lim_{t \to \infty} N(t) = 200$

Big138

Beispiel: Labortemperatur

In einem Forschungsinstitut wird der Einfluss der Umgebungstemperatur auf das Wachstum von Pflanzen untersucht.

In Labor 1 ändert sich die Temperatur gemäß der Funktion $f(t) = 6t \cdot e^{\frac{1}{2}(2-t)}$, in Labor 2 gemäß $g(t) = 12 \cdot e^{\frac{1}{2}(2-t)}$.

(t: Zeit in Tagen; f(t), g(t): Temp. in °C)

a) Zeichnen Sie die Graphen von f und g mit dem TR/Computer für $0 \leq t \leq 10$.

b) Bestimmen Sie, wann die Labore die größte Temperaturdifferenz aufweisen.