Mathematik Q1 Abels

Kopfübung

- Allgemeine Funktionsgleichung:
  - Unbegrenztes Exponentielles Wachstum
  - Unbegrenzter exponentieller Zerfall
  - Begrenztes exponentielles Wachstum
  - Begrenzter exponentieller Zerfall

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Wachstums- und Zerfallsprozesse

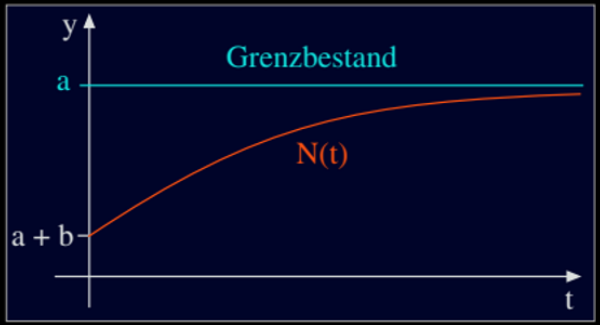
unbegrenzt

Anfangsbestand

pos. = Wachstum
neg. = Zerfall

$$N(t) = \mathbf{N_0} \cdot e^{\mathbf{k}t}$$

begrenzt



$$N(t) = \underline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \cdot e^{-kt}$$

Sättigungsgrenze

Anfangsbestand

pos. = Wachstum
neg. = Zerfall

Big120

Beispiel: Bevölkerungswachstum der USA

Die Tabelle gibt die Bevölkerungsentwicklung der Vereinigten Staaten von Nordamerika in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wieder. Damals lag nahezu unbegrenztes Wachstum vor.

a) Stellen Sie die Wachstumsfunktion auf.

b) In welcher Zeitspanne verdoppelte sich die Bevölkerung?

c) Wie groß war die momentane Wachstumsrate 1790 bzw. 1850?
Wie groß war die mittlere Wachstumsrate?

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
Mio.	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,4

Big120

Wir verwenden den Ansatz des unbegrenzten Wachstums $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$. Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1790.
$N_0 = N(0) = 3{,}9$ ist der Anfangsbestand.
Um k zu berechnen, verwenden wir eine zweite Information aus der Tabelle, z. B. $N(60) = 23{,}4$. Dies führt auf $k \approx 0{,}03$.
Resultat: $N(t) = 3{,}9 \cdot e^{0{,}03t}$

Lösung zu b):
Wir verwenden den Ansatz $N(t) = 2N_0$, d. h. $N(t) = 7{,}8$. Dies führt auf eine Verdoppelungszeit von 23,1 Jahren.
Alle 23,1 Jahre verdoppelte sich die amerikanische Bevölkerung.

Lösung zu c):
Die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten (Zuwachsraten) berechnen wir mit Hilfe der Ableitung N'.

Die mittlere Zuwachsrate berechnen wir mit dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Sie beträgt ca. 325 000 Personen/Jahr bzw. 890 Pers./Tag.
Das ist also eine Kleinstadt pro Monat.

Bestimmung von N_0

$N_0 = N(0) = 3{,}9$ Mio.

Bestimmung von k

Ansatz:
$$\begin{aligned} N(60) &= 23{,}4 \\ 3{,}9 \cdot e^{60k} &= 23{,}4 \\ e^{60k} &= 6 \\ 60k &= \ln 6 \\ k &\approx 0{,}03 \end{aligned}$$

Verdopplungszeit

Ansatz:
$$\begin{aligned} N(t) &= 2N_0 \\ 3{,}9 \cdot e^{0{,}03t} &= 7{,}8 \\ e^{0{,}03t} &= 2 \\ 0{,}03t &= \ln 2 \\ t &\approx 23{,}1 \end{aligned}$$

Momentane Wachstumsraten

$$\begin{aligned} N'(t) &= 0{,}117 \cdot e^{0{,}03t} \\ N'(0) &= 0{,}117 \text{ Mio./Jahr} = 321 \text{ Pers./Tag} \\ N'(60) &= 0{,}708 \text{ Mio./Jahr} = 1939 \text{ Pers./Tag} \end{aligned}$$

Mittlere Zuwachsrate von 1790–1850

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(60) - N(0)}{60 - 0} = \frac{23{,}4 - 3{,}9}{60}$$
$$= 0{,}325 \text{ Mio./Jahr} = 890 \text{ Pers./Tag}$$

Big123

Beispiel: Die Höhe eines Kaktus

Ein kleiner Kaktus wird gepflanzt. Seine Höhe wird durch die Wachstumsfunktion $h(t) = 9{,}90 - 9{,}85 \cdot e^{-0{,}01t}$ beschrieben (t: Zeit in Jahren; h: Höhe in m).

Wie groß war die Pflanzhöhe des Kaktus? Welche Größe kann er maximal erreichen? Nach welcher Zeit wird der Kaktus 2 m hoch sein?

Big123

Lösung:
Die Anfangshöhe ist:
$h(0) = 9{,}90\,\text{m} - 9{,}85\,\text{m} = 0{,}05\,\text{m}$.

Die Grenzhöhe ergibt sich, wenn t immer weiter vergrößert wird und schließlich gegen unendlich strebt. Dabei strebt der Teilterm $e^{-0{,}01\,t}$ gegen 0. Die Funktion h strebt gegen die Grenzhöhe 9,90 m.

Der Kaktus erreicht ca. 22 Jahre nach der Pflanzung die Höhe von 2 Metern, wie die Rechnung rechts zeigt.

Anfangshöhe

$$h(0) = 9{,}90 - 9{,}85 \cdot e^{0} = 9{,}90 - 9{,}85 = 0{,}05$$

Grenzhöhe

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} \left(9{,}90 - 9{,}85 \cdot e^{-0{,}01\,t}\right) = 9{,}90$$

Berechnung der Zeit

$$\begin{aligned} h(t) &= 2 \\ 9{,}90 - 9{,}85 \cdot e^{-0{,}01\,t} &= 2 \\ e^{-0{,}01\,t} &= \frac{7{,}90}{9{,}85} \approx 0{,}802 \\ -0{,}01\,t &= \ln 0{,}802 \\ t &\approx 22{,}06 \end{aligned}$$

Big114

Beispiel: Tropfinfusion

Ein Medikament wird dem Patienten per Tropfinfusion zugeführt. Die Konzentration im Blut steigt gemäß der Funktion $k(t) = a - a e^{-0,04t}$ (t: Zeit in min; k(t): Konzentration zur Zeit t in µg/ml).
Nach 23 Minuten beträgt die Konzentration 30,07 µg/ml.

a) Wie lautet die Wachstumsfunktion?
b) Welche Grenzkonzentration kann nicht überschritten werden?
c) Wann wird die therapeutische Wirkschranke von 40 µg/ml erreicht?
d) Wie groß ist die Anstiegsgeschwindigkeit zu Beginn des Prozesses?