Mathematik 9 Abels

Kopfübung

- $x^2 = 4$
- $4x^2 + 12 = 0$
- $8 - x^2 = -41$

Wie funktioniert der Satz vom Nullprodukt?

Finde zu jeder Gleichung drei unterschiedliche Paare a und b, sodass die Gleichung erfüllt ist.

$a \cdot b = 102$

$a \cdot b = 24$

$a \cdot b = 0$

Warum ist es bei $a \cdot b = 0$ besonders einfach?

Satz vom Nullprodukt

!

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Beispiele:

$$(x+1)\cdot(x-2) = 0 \qquad | \; SvN$$

$$(x+1) = 0 \text{ oder } (x-2) = 0$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = 2$$

$$L = \{-1; 2\}$$

$$2x^2 - x = 0 \qquad | \text{ ausklammern}$$

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \qquad | \; SvN$$

$$x = 0 \text{ oder } (2x - 1) = 0$$

$$x = 0{,}5$$

$$L = \{0; 0{,}5\}$$

Fun158,159 – leicht

1. Nutze den Satz vom Nullprodukt und löse die Gleichung.

a) $x \cdot (x+1) = 0$ b) $(x+2) \cdot x = 0$ c) $(x-13) \cdot (x-1) = 0$ d) $\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot x = 0$

e) $2x \cdot (x+4) = 0$ f) $(0{,}5x - 9) \cdot x = 0$ g) $4x \cdot (x + 1{,}1) = 0$ h) $\left(x + \frac{15}{12}\right) \cdot x = 0$

2. Löse die Gleichung.

a) $(2x-1) \cdot 3 = 0$ b) $x\,(x-1) = 0$ c) $4x\,(3x-1) = 0$ d) $(x - 8{,}25) \cdot 3x = 0$

e) $\left(4x - \frac{1}{2}\right)x = 0$ f) $0 = 4x\,(4x+1)$ g) $0 = (1{,}5 + x)\,x$ h) $0 = \left(\frac{9}{4} - x\right)(x - \sqrt{5})$

7. Ermittle alle Lösungen der Gleichung.

a) $2\,(x-5) \cdot (x+17) = 0$ b) $(\sqrt{7} - x) \cdot (x^2 - 1) = 0$ c) $0 = (144 - x^2) \cdot 7x^2$

d) $x \cdot (x^2 + 1) = 0$ e) $(x^2 - 5) \cdot 3\,(x^2 - 9) = 0$ f) $0 = 17x \cdot (x^2 + 5) \cdot 3$

Fun158,159

Seite 158 | Aufgabe 1

a) $L = \{0; -1\}$
b) $L = \{-2; 0\}$
c) $L = \{13; 1\}$
d) $L = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$
e) $L = \{0; -4\}$
f) $L = \{18; 0\}$
g) $L = \{0; -1{,}1\}$
h) $L = \left\{-\frac{15}{12}; 0\right\}$

Seite 158 | Aufgabe 2

a) $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $L = \{0; 1\}$
c) $L = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$
d) $L = \{8{,}25; 0\}$
e) $L = \left\{\frac{1}{8}; 0\right\}$
f) $L = \left\{0; -\frac{1}{4}\right\}$
g) $L = \{-1{,}5; 0\}$
h) $L = \left\{\frac{9}{4}; \sqrt{5}\right\}$

Seite 159 | Aufgabe 7

a) $L = \{5; -17\}$
b) $L = \left\{\sqrt{7}; 1; -1\right\}$
c) $L = \{12; -12; 0\}$
d) $L = \{0\}$
e) $L = \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}; 3; -3\right\}$
f) $L = \{0\}$

Fun158,159 – mittel

3. Klammere zunächst x aus. Löse dann die Gleichung.

a) $x^2 - 6x = 0$ b) $0 = x^2 + 3{,}5x$ c) $8x + x^2 = 0$ d) $-1{,}5x + x^2 = 0$

e) $4x^2 + 36x = 0$ f) $30x - 2x^2 = 0$ g) $144x + 60x^2 = 0$ h) $-0{,}5x^2 - 3x = 0$

5. a) Stelle jeweils eine Gleichung mit der gegebenen Lösungsmenge auf.

① $L = \{2; 5\}$ ② $L = \{-3{,}5; 10\}$ ③ $L = \{0; 6\}$ ④ $L = \{-4; 0\}$

b) Gib zu den Lösungsmengen aus a) jeweils eine zweite Gleichung an. Erkläre deine Vorgehensweise.

6. Forme so um, dass auf einer Seite der Gleichung 0 steht. Löse dann die Gleichung. Überprüfe die Lösungen durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung.

a) $42x = x^2$ b) $-x^2 = 2{,}5x$ c) $6x^2 = 18x$ d) $4y^2 + 3 = 2y + 3$

Fun158,159

Seite 158 | Aufgabe 3

a) $L = \{0; 6\}$
b) $L = \{0; -3{,}5\}$
c) $L = \{0; -8\}$
d) $L = \{0; 1{,}5\}$
e) $L = \{0; -9\}$
f) $L = \{0; 15\}$
g) $L = \left\{0; -\frac{12}{5}\right\}$
h) $L = \{0; -6\}$

Seite 159 | Aufgabe 5

Individuelle Lösungen, zum Beispiel:

a) ① $x^2 - 7x + 10 = 0$ ② $(x + 3{,}5)(x - 10) = 0$ ③ $x^2 - 6x = 0$ ④ $x^2 + 4x = 0$

b) ① $2x^2 - 14x + 20 = 0$ ② $2(x + 3{,}5)(x - 10) = 0$ ③ $2x^2 - 12x = 0$ ④ $2x^2 + 8x = 0$

Man kann die Gleichungen mit einer Zahl verschieden von Null multiplizieren, ohne die Lösungsmenge zu verändern.

Seite 159 | Aufgabe 6

a) $0 = x^2 - 42x$
$L = \{0; 42\}$

b) $0 = x^2 + 2{,}5x$
$L = \{0; -2{,}5\}$

c) $0 = 6x^2 - 18x$
$L = \{0; 3\}$

d) $0 = 4y^2 - 2y$
$L = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

Fun158,159 – schwer

11. Satz vom Nullprodukt bei höheren Potenzen: Der Satz vom Nullprodukt kann auch für höhere Potenzen genutzt werden. Ermittle alle Lösungen der Gleichung, indem du zunächst ausklammerst.

Beispiel: $4x^3 + 2x^2 = 0$ | $2x^2$ ausklammern

$2x^2(2x + 1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt anwenden

a) $x^3 + x = 0$
b) $4x^3 + 8x^2 = 0$
c) $x^3 - 2x = 0$
d) $1{,}5x^3 - 3x^2 = 0$
e) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x = 0$
f) $9x^2 - 18x^4 = 0$
g) $x^5 - 16x^3 = 0$
h) $22x^4 - 3x^2 = 0$
i) $x^{12} + x^6 = 0$

12. Nutze den Satz vom Nullprodukt und bestimme alle Lösungen der Gleichung.

a) $x(x - 2)(x + 5) = 0$
b) $4x(x - 9)(x^2 - 1) = 0$
c) $(x^2 + 1)(2x^2 - 1)(x - 4) = 0$
d) $(x - 2)^2(x + 4) = 0$
e) $(x^2 - 6x + 9)(5 - x) = 0$
f) $(x^2 - 9)(x + 7) = 0$

13. Löse die Gleichung, indem du zunächst ausklammerst

Beispiel: $x(2 - x) - 5(2 - x) = 0$ | $(2 - x)$ ausklammern

$(x - 5)(2 - x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt anwenden

a) $x(x + 1) + 3(x + 1) = 0$
b) $(x - 3) \cdot x + (x - 3) \cdot 4 = 0$
c) $2x(x - 2) - 4(x - 2) = 0$
d) $2{,}5(1 + x^2) - (1 + x^2)5x = 0$
e) $x(x + 7) + 2(x + 7) = 0$
f) $2a(a + 1) - a(a + 1) \cdot 4 = 0$
g) $8(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) = 0$
h) $(x - 2)^2 + (x - 2) = 0$

Fun158,159

Seite 159 | Aufgabe 11

a) $L = \{0\}$
b) $L = \{0; -2\}$
c) $L = \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$
d) $L = \{0; 2\}$
e) $L = \{0\}$
f) $L = \left\{0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$
g) $L = \{0; 4; -4\}$
h) $L = \left\{0; -\sqrt{\frac{3}{22}}; \sqrt{\frac{3}{22}}\right\}$
i) $L = \{0\}$

Seite 159 | Aufgabe 12

a) $L = \{0; 2; -5\}$
b) $L = \{0; 9; 1; -1\}$
c) $L = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 4\right\}$
d) $L = \{2; -4\}$
e) $L = \{3; 5\}$
f) $L = \{3; -3; -7\}$

Seite 159 | Aufgabe 13

a) $L = \{-3; -1\}$
b) $L = \{3; -4\}$
c) $L = \{2\}$
d) $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
e) $L = \{-7; -2\}$
f) $L = \{0; -1\}$
g) $L = \{-8; 1; -1\}$
h) $L = \{1; 2\}$

Hausaufgabe

Fun160

16. Die Höhe eines Wasserstrahls über dem Boden lässt sich durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}3x^2 + 3x$ beschreiben (Längeneinheit 1 m). Berechne, in welchem Punkt der Wasserstrahl beginnt und wie weit er reicht.